TÖLVÍSI

SAMANTEKIN AÐ TILHLUTUN OG

Á KOSTNAÐ

HINS ÍSLENZKA BÓKMENTAFÈLAGS

AF

FYRRUM YFIRKENNARA

BIRNI GUNNLAUGSSYNI.

I. HEPTI.

REYKJAVÍK.

PRENTUÐ Í PRENTSMIÐJU ÍSLANDS. E. ÞÓRÐARSON.

1865.

☞ ÞETTA TITILBLAÐ ER TIL BRÁÐABIRGÐA.

Inngangur.

1.

Allir vita, hvað tala er, tal og töl*. Vísindagrein sú, er kennir eðli og háttalag talnanna eða þeirra meðferð, nefnist af sumum Tölvísi (Konráð Gíslason); ɔ: töluvísi, talnavísi, tölufræði (Arithmetica, af grísku orði ἀριθμός tala).

2.

Tölvísin er hinn fyrri hluti stærðafræðinnar (Mathematica), sem er sú vísindagrein, er ræðir um eiginlegleika og sambönd stærðanna yfir höfuð. En Stærð (Quantitas) er það eðli hlutanna, fyrir hvert þeir geta hugsazt meiri eða minni, t. a. m. Tími hefir stærð, því hann getur hugsazt lengri eða styttri.

3.

Stærðir eru tvennslags, eða hugsast með tvennu móti: continuæ (samfeldar) og discretæ (sundurlausar). Hinar samfeldu eru heildir, hvar enginn skilnaður er milli partanna, svo sem lengd, tímabil, afl, flýtir. Þær sundurlausu eru söfn samkynja einstakra hluta eða eininga, t. a. m. flokkur manna, ríkisdalatal og yfir höfuð öll tala. Þó geta samfeldar stærðir skoðazt sem sundurlausar s. s. 4 stundir, 5 þingmannaleiðir, 7 ár, 1 skippund eða 4 vættir, 6 hesta átak, þyngd líkamanna á miðbaugi og við heimsskautin, ljóssins hraði og magn þess, svo sem þegar tunglsljósið er borið saman við sólarljósið. Hèr er stundin, þingmannaleiðin, árið, skippundið, vættin, hestsaflið, fallrúm á secundunni, vegur farinn á secundu hinir töldu hlutir.

4.

Stærðir ákveðast eða ákvarðast með því að bera þær með einhverju móti saman við aðra samkynja stærð, sem er eða þykir

*) Manntal og ártöl. Tölvísi mun myndað eins og lögvísi og sögvísi. Tölvísi, sjá Snorra-Eddu, Reykjav. útg. bls. 110.

kunnug eða kunnari en hinar, sem ákvarðast. Þetta er umtalsefni mælifræðinnar eða stærðafræðinnar yfir höfuð, hvort sem hún er tölvísi eða rúmfræði, t. a. m. dagshringur er 24 stundir, allir geislar hrings eru jafnir sín á milli. Sú kunnuga stærð, sem höfð er til samanburðar, nefnist opt kvarði, og af því kemur orðið að ákvarða; en í tölvísinni heitir kvarðinn Eining eða einn (Eind) og þar af leiðir, að tala (numerus) er sundurlausrar stærðar samburður við eininguna eða einn.

5.

Stundum er tilgreind tegund einingarinnar eða að einingin heiti eitthvað meira en einn, svo sem 8 ríkisdalir; þar í er einn ríkisdalur sama sem einn; en auk þess að það er einn, þá heitir það ríkisdalur. Þessháttar tölur heita viðkendar tölur (numeri concreti; ɔ: samvaxnar). Þar á móti heita þær tölur óviðkendar (numeri abstracti; ɔ: afdregnar), sem við ekkert eru kendar, nema við einingu sína, svo sem átta, það er átta einingar. Í þessum tölum hugsa menn ekki um það, sem talið er, heldur um töluna sjálfa eins og afdregna hlutunum.

6.

Tölur eru tilteknar (num. determinati), þegar tilgreint er, hve opt einingin er endurtekin í þeim, ellegar ótilteknar (numeri indeterminati), þegar það er ekki gjört. Þessar ótilteknu tölur geta menn ímyndað sèr, þó menn ekki viti töluna sjálfa; menn geta jafnvel margt ákvarðað um þær, sundrað þær og sameinað með mörgum hætti og gjört þar af margar ályktanir, þó enga töluna viti, t. a. m. Hallgrímur sá snemma dags stóra lest fara ofan í Reykjavík; skömmu síðar sá hann aðra enn stærri fara þangað; svo kom hin þriðja, er í voru eins margir hestar sem í hinum fyrri báðum. Út af þessu má margt álykta: t. a. m. að hestafjölda þeim, sem á þeim tíma fór ofan í Reykjavík, megi skipta í tvo helminga, svo jafnmargir hestar verði í báðum; að það hafi verið að minsta kosti fimmtíu hestar alls, ef í hinni fyrstu hafa verið tólf; að þar hafi engan veginn færra verið alls en ferföld fyrsta lestin að tillögðum tveimur hestum o. s. frv. Eins og allir vita, kennir reikningslistin eða talnalistin að reikna með tilteknum tölum; þar á móti kennir bókstafareikningurinn

og Algebra að reikna með ótilteknum tölum, ellegar með tölum, sem sumar eru tilteknar, en sumar ótilteknar ellegar í talnaflækjum hálftilteknar. Reikningslistin, bókstafareikningur og Algebra ásamt öðru fleiru eru deildir eða tegundir tölvísinnar.

7.

Tölvísin er tvennslags: Arithmetica theoretica (skoðandi) og practica (fremjandi). Hin skoðandi tölvísi leitar upp eðli talnanna og semur reglur, eptir hverjum finna skuli tölur af tölum; hin fremjandi reiknar út sjálfar tölurnar eptir reglum þeim og lögmálum, sem hin skoðandi hefir uppgötvað. Hin skoðandi tölvísi notar einkum bókstafareikninginn til að útleiða reglur af reglum, lögmál af lögmálum, rètt að sínu leyti sem hin fremjandi reiknar tölur af tölum.

8.

Í hinni skoðandi tölvísi, einnig yfir höfuð í hinni skoðandi stærðafræði eru allir lærdómar framsettir í stuttum málsgreinum, er heita Sagnir (Propositio). Eptir þeirra sambandi og afstöðu sín á milli nefnast þær þannig:

1. Axioma. Frumsögn (Meginmál? Konráð) er sú sögn, er þykir svo sjálfsögð, að ekki þurfi að sanna hana, og leggjast á til grundvallar við sönnun annara sagna.
   Merk! Sumt verður að álita svo ljóst, að ekki verði sannað eða þurfi að sanna, því eitthvað verður að leggja til grundvallar líkt og í húsgjörð, og hinn neðsti grundvöllur verður ekki hlaðinn eða bygður, því einhverstaðar verður að byrja.
2. Placitum (Venja) er sú sögn, er segir, að eitthvað sè gjört, sem gjarna mætti vera öðruvísi, þar það sè ekki við brýna nauðsyn bundið.
3. Postulatum (Krafa) er verk, sem ekki þarf að kenna, nè heldur sanna, að þess aðferð sè rètt.
4. Theorema (Lærdómsgrein) er sögn, sem þarf að sanna. Hennar partar eru: Hypothesis (Skilyrði), er getur haft í sèr eina eða fleiri sagnir, og Thesis (Setning). Sönnunin (Demonstratio) er framsett með ályktunum, svo að nauðsyn setningarinnar verði skilin.
5. Problema (Verkefni) heimtar eitthvað framkvæmt, sem ei er

mögulegt nema með fleirum atvikum, er þarf að kenna og sanna. Solutio (Úrlausn) er kenningin, og verður að sanna að hún dugi.

6. Definitio (Orðþýðing) er takmörkun hugmyndar, sem með orðinu táknast.
7. Corollarium (Viðbót) er sögn, sem hægt er að finna og sanna af næstundangangandi aðalsögn, lærdómsgrein eða orðþýðingu. Viðbótin er því framsett án sönnunar.
8. Lemma (Lánssögn) er sögn, er á heima í annari vísindagrein, en skýrir þó umtalsefnið.
9. Scholion (Skýring) er sèrhvað, sem sagt verður til frekari skýringar, en er ekki eins reglum bundið sem hinar áður töldu sagnir.

þessar greiningar málsgreinanna hafa menn nú á síðari tímum að mestu aflagt, og svo munum vèr einnig gjöra, en halda þeim að eins áfram hèr um bil í talningunni og hinum 4 höfuðgreinum: samlagningu, frádragningu, margföldun og deilingu, til að sýna dæmi upp á slíkar málsgreinir.

Talning, (*Numeratio*).

1. Í 4. tölulið inngangsins er sagt, að tala sè sundurlausrar stærðar samburður við eininguna. þessi samburður framkvæmist þannig, að menn hafa komið sèr saman um fastsetta röð af orðum; nefna menn svo orð við hverja einingu í stærðinni, unz uppunnið hafa allar einingarnar í henni einu sinni. það orð í röðinni, sem seinasta einingin fær, segir þá til, hversu opt einingin er innifalin í stærðinni.

2. Definitio. þessi aðferð að mæla stærðina með einingunni heitir að telja, orðin heita tölur, og orðaröðin hin eðlilega talnaröð.

3. Placitum. Hin eðlilega talnaröð, sem vèr Íslendingar höfum, er:

einn, tveir, þrír, fjórir, fimm, o. s. frv.

En í skrifi nota menn þessa indversku* tölustafi:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

hvar af 0 (Núll) þýðir, að þar sè engin eining, heldur autt rúm eða sæti. En til þess að aldrei þrjóti tölur eða tölu teikn, nota

*) Að þeir sè indverskir, sjá Hauks Erlendssonar Algorithmus.

menn sömu tölustafina upp aptur og aptur eptir jafnlangar umferðir. Þegar búið er að telja 9, skrifa menn 0 með 1 fyrir framan, þannig: 10, er þýðir tíu, eða 1 Tug og enga einingu. Umferðin heitir Tugur (Decas), talingaraðferðin Tugakerfi (Decadica, Decadik). Þegar tuttugu einingar eru komnar, rita menn 20, er þýðir, að umferðin sè tvisvar komin í kring, og engin eining fram yfir. Þannig telur annar stafurinn frá hægri hendi umferðirnar eða tugina. Þegar hundrað eða 10 sinnum 10 er komið, skrifast 100, það er eitt hundrað, enginn tugur og engin eining; þannig telur þriðji stafurinn frá hægri hendi hundruðin. Umferðirnar mynda nokkurs konar einingastèttir (Ordines), sem alt af verða hærri og hærri, eptir því sem talan vex, og tölustafurinn færist nær vinstri hendi. Einingastèttirnar heita þannig:

	. Einingar		3	. trillíónir	
	. tugir			. tíu	trillíóna
	. hundruð			. hundrað	trillíóna
	, þúsundir			, þúsund	trillíóna
	. tugir	þúsunda		. 10 þúsund	trillíóna
	. hundruð	þúsunda		. 100 þúsund	trillíóna
1	, millíónir		4	, kvaðrillíónir	
	. tugir	millíóna		. tíu	kvaðrillíóna
	. hundruð	millíóna		. hundruð	kvaðrillíóna
	, þúsundir	millíóna		, þúsund	kvaðrillíóna
	. tíu	þúsundir millíóna		. 10 þúsund	kvaðrillíóna
	. hundrað	þúsundir millíóna		. 100 þúsund	kvaðrillíóna
2	, billíónir		5	, kvinkvillíónir	
	. tíu	billíóna		. tíu	kvinkvillíóna
	. hundrað	billíóna		. hundruð	kvinkvillíóna
	, þúsund	billíóna		, þúsund	kvinkvillíóna
	. tíu	þúsundir billíóna		. 10 þúsund	kvinkvillíóna
	. hundrað	þúsundir billíóna		. 100 þúsund	kvinkvillíóna

4. Problema. Að lesa tölu mikla ritaða í tugakerfi. Solutio: 1, Skipt tölunni í flokka frá hægri hendi til vinstri, að þrír stafir verði í hverjum; en næst vinstri verða þá annaðhvort þrír

tveir eða einn seinast í flokki. 2, Í hverjum þriggja stafa flokki eru þá í röð

Hundruð, Tugir, Einingar.

Núllin lesast ekki og ei heldur orðið »einingar«, t. a. m.:

456, les fjögur hundruð fimmtíu og sex, og nefn flokksnafnið.

406, les fjögur hundruð og sex, nefn flokksnafnið.

056, les fimmtíu og sex, nefn flokksnafnið.

006, les sex, og nefn flokksnafnið.

000, lesist alls ekki, ef það er þúsundaflokkur, en sè það síðari hluti millíónakafla, þá nefn að eins millíónanafnið.

Sè heill millíónakafli auður, 000,000, þá nefnist þar ekki millíóna nafn.

3. Yfir einingastaf í þriðja, fimta, sjöunda, níunda flokki (o. s. frv.) rita 1 2 3 4 er þýðir millíónir, billíónir, trillíónir, kvaðrillíónir, og nefnast þær sem einingar, þegar kaflinn endar, en annarstaðar nefnast aldrei neinar millíónastèttir.

4. Með nokkrum vana má lesa úr stórri tölu, án þess að gjöra nein merki í bókina, með því að styðja fingri eða oddi niður milli millíónakaflanna, þess vegna eptir sjötta hvern staf, ellegar mæla út með augunum eintóma sexstafakafla frá hægri hendi til vinstri, og telja þá um leið. Þá stafi, sem afgangs verða vinstra megin, má lesa eins og undirkafla, og nefna með því milliónastèttar nafni, sem kent er við tölu hinna afmældu kafla. Hinir eptirfylgjandi sexstafakaflar takast svo einn eptir annan og kennast við lækkandi millíónastèttir.

Demonstratio. Með þessu móti greinast einingastèttirnar svo glögglega hver frá annari, að hvergi verði samslengt, og þá má fá ímyndun um, hvað opt stærðin innibindur í sèr eininguna.

Dæmi.

$$\overset{14}{1},020,03\overset{13}{0},004,00\overset{12}{0},050,00\overset{11}{0},060,00\overset{10}{0},007,00\overset{9}{0},000,08\overset{8}{0},000,00\overset{7}{0},$$

$$090,00\overset{6}{0},000,00\overset{5}{1},000,00\overset{4}{0},000,00\overset{3}{1},100,00\overset{2}{0},000,00\overset{1}{0},120,000.$$

Ein 14 mælt millíón*, 20 þúsund og 30 þrettánmæltar millíónir, 4 þúsund tólfmæltar millíónir, 50 þúsund ellefumæltar millíónir, 60 þúsund tímæltar millíónir, 7 þúsund nímæltar millíónir, 80

*) þessi aðferð að íslenzka millíónastèttirnar, er eptir Ólaf Secretera Olavius í hans talnalist bls. 13.

áttmæltar milliónir, 90 þúsund sexmæltar milliónir, 1 fimmælt millión, 1 þrímælt millión, 100 þúsund tvímæltar milliónir, 120 þúsund.

Merk! Í Fránkaríki þýðir ekki billión, trillión, kvaðrillión, kvinkvillión o. s. frv. milliónföldun hins lægra milliónakyns eða stéttar eins og í (3) var gjört ráð fyrir og sem gildir í Danmörk og Þýzkalandi; heldur þýðir billión að eins þúsund milliónir, trillión þúsund billiónir o. s. frv. þúsundfalt hið undangengna.

5. Viðbót. Það er auðskilið, að ekki er öldungis nauðsynlegt að láta umferð kerfisins vera tíu, eða telja til tíu, eins og í tugakerfinu er gjört; fingurnir hafa gefið mönnum tilefni til þess. Menn hafa hliðsjón af fleiri kerfum til að skýra fyrir sèr ýmisleg eðli tugakerfisins. Þannig skoða menn Tvistarkerfið (Dyadik), Þristarkerfið (Triadik), Fimtarkerfið (Pentadik), o. s. frv.

6. Theor. Í sèrhverju tölukerfi eru merkjandi stafirnir einum færri en einingarnar í umferðinni; en umferð hver fyllist, þegar Núll kemur ásamt merkjanda staf fyrir framan, er telur, hvað margar umferðir komnar sè í kring.

Þannig er umferðin í fimtarkerfi:

1 2 3 4 10

og í átjándarkerfi

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) 10.

Dem. Þar tugakerfið er fyrirmynd allra slíkra kerfa, þá er hægt að sjá, að í því eru einungis níu stafir merkjandi, og þegar tugurinn er kominn, þá táknast hann með Núlli, sem þýðir autt sæti eða enga einingu, og með 1 fyrir framan, sem þýðir, að 1 tugur sè kominn.

7. Schol. Þar stafirnir í tugakerfinu, sem að eins eru 9, ekki nægðu til að tákna alla stafina í átjándarkerfinu, sem eru 17, þá varð að bæta við nýjum töluteiknum, sem hèr lokast í sviga (10) (11) og eiga að álítast sem einn stafur væri.

8. Probl. Að gefa sýnishorn af misgöngum umferða í ýmislegum kerfum.

Solutio.

	í tvistarkerfi	þristarkerfi	fjarkakerfi	fimtarkerfi	tylftarkerfi
Einn skrifast	1	1	1	1	1
Tveir ——	10	2	2	2	2
Þrír ——	11	10	3	3	3
Fjórir ——	100	11	10	4	4
Fimm ——	101	12	11	10	5
Sex ——	110	20	12	11	6
Sjö ——	111	21	13	12	7
Átta ——	1000	22	20	13	8
Níu ——	1001	100	21	14	9
Tíu ——	1010	101	22	20	(10)
Ellefu ——	1011	102	23	21	(11)
Tólf ——	1100	110	30	22	10

Demonstratio.

Tólf er 1 tvistur þriðju stèttar (ɔ: 8) og 1 tvistur annarar stèttar (ɔ: 4). En 8 og 4 er 12.

Tólf er einnig 1 þristur annarar stèttar (ɔ: 9) og 1 þristur fyrstu stèttar (ɔ: 3), en 9 og 3 er 12.

Tólf er einnig 3 fjarkar fyrstu stèttar, en 3svar 4 er 12.

Tólf er einnig 2 fimtir fyrstu stèttar (ɔ: 10) og tvær einingar að auki, en 10 og 2 eru 12.

Tólf er loksins 1 tylft fyrstu stèttar (ɔ: 12) og ekkert að auki, en 12 og 0 er 12.

Í fyrsta staf næst hægri hendi eru einingar fyrstu stèttar; í öðrum staf umferðir fyrstu stèttar, í þriðja staf umferðir annarar stèttar, í fjórða staf umferðir þriðju stèttar, o. s. frv.

9. Probl. Að framsetja í alment gildanda formkorni (Formula) lögmálið fyrir ritun í öllum slíkum tölukerfum.

Solutio.

$kU^{\mu} \cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a.$

a segir til, hvað margar sè einingar fyrstu stèttar, U er umferðin, sem kerfið er kent við (Uundin); i tugakerfinu er U sama sem 10.

b segir til, hvað margar sè umferðir fyrstu stèttar komnar, eða hvað mörg U. Liðurinn *b*U getur skoðazt eins og viðkend tala, þar sem *b* er talan í, en U nafnið, eins og þar stæði skammstafað: *b* umferðir fyrstu stèttar.

U^2 er umferð annarar stèttar, eða U sinnum U. Í tugakerfinu er U^2 sama sem 10 sinnum 10 eða 100. Með sama hætti er:

U^3, U^4, U^5, $\cdots\; U^{\mu}$

umferð þriðju, fjórðu, fimtu $\cdots \mu^{tu}$ stèttar, þar í er U^3 sama sem U sinnum U^2, U^4 er U sinnum U^3, og svo framvegis, en U^{μ} eða umferð μ^{tu} stèttar er hin hæsta, sem i hverri tiltekinni tölu liggur, c, d, $e \cdots k$ segir til, hvað margar sè komnar af hverri einingastètt. En a telur engar umferðir, heldur einingar.

Merkið $+$ þýðir, að stærðirnar, sem hægra megin þess standa, sè fram yfir þær, sem vinstra megin þess eru. Punktaröðin, sem stendur milli liðanna eU^4 og kU^{μ}, merkir óákveðinn liðafjölda; en liðir kallast það, sem greint er með $+$ frá öðru.

Stafirnir a, b, c, d, $e \cdots k$ geta merkt allar tölur, sem minni eru en U; þeir geta líka hver fyrir sig merkt o, nema k einsamalt, því ef k er o, þá skrifa menn ekki þann lið eða tölustaf. Þannig verður þá stafafjöldi tölunnar ætíð $\mu + 1$, eða einum fleiri en umferðastèttir tölunnar.

Þegar kunnug er umferð kerfisins, má í riti sleppa öllum nöfnunum U^{μ}, $\cdots$ U^4,U^3,U^2,U, því umferða og einingastèttirnar þekkjast af sætunum, þegar tölustafirnir eru settir hver hjá öðrum, þannig:

$k \cdots edcba,$

byrja menn svo að telja umferðastèttirnar á b, en einingastèttirnar á a.

Sönnunin flýtur af 7da og 8da tölulið.

10. Probl. (handa þeim, sem lært hafa áður þær algengu 4 höfuðgreinir í reikningi). Að rita sèrhverja gefna tölu í hverju kerfi er vill.

Solutio.

1. Margfalda umferð U hins nýja kerfis i sjálfa sig, þá finnurðu U^2, margfalda aptur U^2 með U, fæst þá U^3, svo U^3 með U, fæst þá U^4 o. s. frv. hvað af hverju, þangað til hin útkomandi tala verður stærri en hin gefna. 2. Þegar þú sèr, að hin útkomandi tala er orðin stærri en hin gefna, þá kasta þeirri útkomnu, en hirð hina næst minni, er við margföldunina framkom, því hún er U^{μ}, og μ er umferðarstèttin, og hefir μ í sèr eins margar einingar sem U voru mörg tekin í margföldununum, að frá reiknuðu því, sem burtvarpað var. 3. Með U^{μ} skal deila hinni gefnu tölu. Hlutatalan verður þá k; en afganginum (ef hann verður

Þær 4 höfuðgreinir (Species).

Samlagning (*Additio*).

13. Frumsögn. Tala sömu taldra eininga er ekki utan ein, í hvaða röð sem þær eru taldar; eða heildin hefir í sèr vissan fjölda eininga.

1. Viðbót. Telja má sömu einingar í hverri röð sem vill; þær verða alla vega jafnmargar.

Skýring. Til dæmis má taka deplana í þessari heild

.	.	.	.	.	.	.	.	
1	2	3	4	5	6	7	8	fyrsta talning
8	7	6	5	4	3	2	1	önnur talning
8	4	3	1	2	5	6	7	þriðja talning

o. s. frv.

14. Orðþýðingar. Summa eða samtala er tala, sem í einu lagi hermir allar einingarnar í tveimur eða fleiri sundurgreindum samkynja tölum. Þær sundurgreindu tölur heita samleggjendur (Addendi), og að finna summuna heitir að leggja saman (Addere).

1. Viðbót. Addera er þá einnig að samansetja heildina (Totum) af deildum sínum (Partes), þegar deildirnar eru framsettar í tölum, láta svo heildina framkoma sem tölu.

2. Viðbót. Samleggjendurnir hljóta að vera samkynja, annars gjöra þeir enga heild, nema þeim sè útvegað sameiginlegt nafn, t. a. m. ekki verður lagt saman 4 hestar og 5 kýr, því heildin verður hvorki 9 hestar nè 9 kýr, heldur verður það 9 stórgripir.

15. Venjá. Samlagning er kunngjörð með $+$, er heitir Plus, og sezt á milli samleggjandanna.

16. Skýring. Samlagning er þannig kunngjörð:

$a = b + c + d$ o. s. frv. eða

Heild $=$ Deild $+$ Deild $+$ Deild o. s. frv.

Merkið $=$ heitir Jafnaðarmerki (Signum æqualitatis) og táknar það, að stærðirnar báðum megin við það sè jafnar sín á milli.

17. Verkefni. Við eina tölu $= a$ að telja aðra tölu $= b$.

Úrlausn. Talan a hefir sitt sæti í hinni eðlilegu talnaröð, nefn þá hið næsta töluorð við hina fyrstu einingu í b, og svo hvað af hverju nefn orðin í framhaldi talnaraðarinnar, unz allar einingarnar í b hafa fengið sitt töluorð, þá segir seinasta töluorðið, hvað margar sè einingarnar í a og b til samans, eða í $a + b$.

Sönnun. Þegar talan a er lögð til grundvallar, er gjört ráð fyrir, að talnaröðin hafi í henni verið byrjuð frá upphafi, og haldið áfram, unz allar einingarnar í a voru taldar, eptir (1). En í tölunni b er ekki byrjað á upphafi talnaraðarinnar, heldur lesið framhald hennar við einingarnar í b, unz allar eru taldar. Með þessari aðferð eru þá taldar einingarnar í heildinni eptir (1).

18. Lærdómsgrein. Það kemur fyrir eitt, í hvaða röð lagt er saman. Því einingarnar í heildinni eru hinar sömu, í hvaða röð sem þær eru taldar (13).

$$3 + 4 = 4 + 3 = 7$$

.	.	. |	.	.	.	.	= heild
1	2	3	1	2	3	4	talning í deildunum
1	2	3	4	5	6	7	= 3 + 4 samantalning = 7
7	6	5	4	3	2	1	= 4 + 3 samantalning = 7

Það má einnig skiljast þannig: þó að deildirnar flytjist fram og aptur í heildinni, þá breytist ekki einingafjöldinn í heildinni fyrir það. Í ótilteknum tölum táknast þetta þannig:

$$a + b = b + a$$

eða ef addendi eru 3

$$a + b + c = b + a + c = c + b + a \text{ o. s. frv.}$$

19. Krafa. Menn vita utanbókar summur sèrhverra tveggja talna fyrir innan 10, annaðhvort af daglegum vana, ellegar af samlagningartöflunni.

20. Verkefni. Að leggja saman tölur ritaðar í tugakerfi.

Úrlausn. Hèr í er það seinlegt að telja við eptir (17). Þess vegna rita tölurnar hverja undir aðra, svo að sömu stèttar einingar standi hver niður undan annari; byrja síðan hægra megin, og legg saman hvern dálk sèr í lagi og rita undir stryk summuna; verði nokkurstaðar summan meiri en 9, þá tak þar af svo margar einingar næstu stèttar fyrir ofan sem má, og legg við næstu röð vinstra megin. En það sem fram yfir er skrifast undir röðina, sem þú varst að leggja saman.

Dæmi:

678345	Hèr kveð svo að orði: 4 og 1 er 5, og 5 er 10;
5321	tugurinn leggst við tugina, en 0 skrifast hèr undir.
4894	1 og 9 er 10, og 2 er 12, og 4 er 16; skrifa 6;
688560	1 og 8 er 9, og 3 er 12, og 3 er 15, skrifa 5,
	geym 1; svo 1 og 4 er 5, og 5 er 10, og 8 er 18,
	skrifa 8, geym 1. 1 og 7 er 8, skrifa 8, og 6 niður.

$$\begin{array}{rrrr}
5U^3 + & 0U^2 + & 7U + & 6 \\
8U^3 + & 9U^2 + & 4U + & 3 \\
 & 6U^2 + & 3U + & 0 \\
 & 4U^2 + & 2U + & 1 \\
 & 8U^2 + & 0U + & 7 \\
\hline
\end{array}$$

Úrlausn: $13U^3 + 27U^2 + 16U + 17$.

Sönnun: Samkynja stærðir eru hèr samanlagðar; en ekki verður kynbreitt nè lægri stèttir gjörðar að hærri stèttum, meðan menn ekki vita eða tiltaka, hvað margar einingar lægri stèttar fylla eina af hærri stètt.

Vilji eg láta þetta vera tugakerfi, þá er:

$$\begin{array}{rl}
13U^3 = & U^4 + 3U^3 \\
27U^2 = & \quad 2U^3 + 7U^2 \\
16U = & \quad\quad U^2 + 6U \\
17 = & \quad\quad\quad U + 7 \\
\hline
 & U^4 + 5U^3 + 8U^2 + 7U + 7
\end{array}$$

og er þessi summa sama sem 15877 í tugakerfi, eins og lagt hefði verið saman:

$$\begin{array}{r}
5076 \\
8943 \\
630 \\
421 \\
807 \\
\hline
15877
\end{array}$$

Þar á móti ef $13U^3 + 27U^2 + 16U + 17$ ætti að vera tylftarkerfi, þá væri:

$$\begin{array}{rl}
13U^3 = & U^4 + U^3 \\
27U^2 = & \quad 2U^3 + 3U^2 \\
16U = & \quad\quad U^2 + 4U \\
17 = & \quad\quad\quad U + 5 \\
\hline
 & U^4 + 3U^3 + 4U^2 + 5U + 5
\end{array}$$

sama sem 13455 í tylftarkerfi, eins og lagt hefði verið saman:

$$\begin{array}{r}
5076 \\
8943 \\
630 \\
421 \\
807 \\
\hline
13455
\end{array}$$ í tylftarkerfi.

23. Frumsagnir.

1. Jafnar stærðir lagðar við jafnar stærðir gefa jafnar summur.

t. d.

$$\begin{array}{rcl} 7 &=& 3 + 4 \\ 6 &=& 5 + 1 \\ \hline 13 &=& 8 + 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a &=& b + c \\ d &=& e + f \\ \hline a + d &=& b + c + e + f. \end{array}$$

2. Jafnar stærðir lagðar við ójafnar, ellegar ójafnar stærðir lagðar við jafnar, gefa ójafnar summur; hið meira verður þar, hvar meira var samanlagt.

$$\begin{array}{rcl} 10 &>& 4 + 5 \\ 6 &=& 5 + 1 \\ \hline 16 &>& 9 + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a &>& b + c \\ d &=& e + f \\ \hline a + d &>& b + c + e + f. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 20 &=& 12 + 8 \\ 12 &<& 14 + 2 \\ \hline 32 &<& 26 + 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a &=& b + c \\ d &<& e + f \\ \hline a + d &<& b + c + e + f. \end{array}$$

Merkin $<$, minna merkið, og $>$, stærra merkið (*Signa minoritatis & majoritatis*) tákna, að sú stærðin sè meiri, sem opin snúa að, og sú minni, sem oddarnir snúa að.

24. Verkefni. Að leggja saman viðkendar tölur.

Úrlausn. Viðkendar tölur (inng. 5.) og margskonar leggjast saman eptir sömu reglum, að það, sem er sama kyns, er lagt saman, en ýmiskonar ritast hvað hjá öðru t. d.

Lyfjavigt	6 ℔	4 *Únzíur*	5 *Drökmur*	2 *Skrúplar*	15 *Grön.*
	5 —	3 —	4 —	1 —	12 —
	7 —	3 —	3 —	2 —	8 —
	18 ℔	11 *Únzíur*	6 *Drökmur*	» *Skrúplar*	15 *Grön.*

(15 + 12 + 8) *Grön* = 35 *grön* = 1 *skrúpull* + 15 *grön.* *Skrúpullinn* legst við *skrúplana*. Þá (1 + 2 + 1 + 2) *skrúplar* = 6 *skrúplar* = 2 *drökmur.* Þær leggjast við *drökmurnar* (2 + 3 + 4 + 5) *drökmur* = 14 *drökmur* = 1 *únzia* 6 *drökmur.* *Únzian* legst við *únziurnar* (1 + 3 + 3 + 4) *únziur* = 11 *únziur.* (7 + 5 + 6) ℔ = 18 ℔.

Frádragning (*Subtractio*).

25. Orðþýðingar. Mismunur (*Differentia*) er sá samleggjandi, er með öðrum gefnum samleggjanda fyllir gefna summu. Hinn gefni samleggjandi heitir Frádragi (*Subtrahendus*), hin gefna

summa heitir Minkandi (*Minuendus*). Að leita mismunarins heitir að draga frá (*Subtrahere*), og athöfnin Frádragning (*Subtractio*).

1. Viðbót. Að draga frá, er þá af kunnugri heild og hennar deild að finna hennar fyllandi deild.

2. Viðbót. Frádragi og mismunur samanlagðir eru jafnir minkanda.

3. Viðbót. Mismunur dreginn frá minkanda gefur frádraga.

26. Venja. Frádragningarmerkið er — (Minus); og þá stendur minkandi vinstra megin þess, en frádragi hægra megin t. d. $8 - 5 = 3$, er lesið: 8 *minus* 5 er 3, eða 8 að frádregnum 5 er 3. Talan, sem hægra megin við — stendur, er ætíð frádragi.

1. Viðbót. Þegar notuð eru merkin + og —, þá má framsetja samband samlagningar og frádagningar í þessum þremur sögnum:

I. $m = s + d$ eða heild = deild + deild,
II. $m - s = d$ eða heild — deild = annari deild,
III. $m - d = s$ eða heild — fyllideild = deild.

Hèr þýðir *m Minuendus*, *s Subtrahendus*, *d Differentia*, og hvenær sem sú eina af þessum sögnum er sannleikur, þá eru þær allar 3 sannar; svo þar af má ætíð álykta hinar tvær af einni þeirra, t. a. m. Ártal Krists er heild samsett af tveimur deildum: fæðingarártali manns og aldri hans; þá má setja heildina jafna deildum sínum samanlögðum þannig:

I. Ártal Krists = fæðingarártal + aldur.
II. Ártal Krists — fæðingarártal = aldur.
III. Ártal Krists — aldur = fæðingarártal.

Viti eg yfirstandanda ártal Krists og aldur minn, þá fæ eg með frádragningu fæðingarártal mitt eptir III; viti eg ártal Krists og fæðingarártal mitt, fæ eg með frádragningu aldur minn eptir II. Viti eg bæði fæðingarártal mitt og aldur minn, þá fæ eg ártal Krists með samlagningu eptir I. Vilji einhver hafa þetta dæmi í tilteknum tölum, þá sè ártal Krists = 1855, fæðingarártalið = 1788, þá er eptir II $1855 - 1788 = 67$ sem er aldurinn. Þá standa þessir þrír reikningar heima:

Addendi { 1788 deild 67 deild	*Minuendus* 1855 heild *Subtrahend.* 1788 deild	*Min.* 1855 heild *Sbtr.* 67 deild
Summa 1855 eptir I.	*Differentia* 67 eða deild eptir II.	*Diff.* 1788 eða deild. eptir III.

2. Viðbót. Eins og í samlagningu skipta má um samleggjendur, svo má í frádragningu skipta um frádraga og mismun. Merk. Það hjálpar mönnum mjög mikið áfram í stærðafræði og tölvísi, að hugleiða, hvernig stærðirnar raða sèr niður í heildir og deildir.

3. Viðbót. Í frádragningu skoðast heildin eins og samsett af tveimur deildum. En þetta má að nokkru leyti líka segjast um samlagningu, því þó fleiri tölur eigi saman að leggja, þá eru alt af teknar tvær í einu, og samanlagðar, kemur þá summa, sem einnig er tala, og við þá tölu legst hin þriðja, svo alt af eru tvær tölur hafðar undir í einu.

4. Viðbót. Þar tölurnar í frádragningunni eru hinar sömu sem í samlagningunni, þá leiðir þar af, að ekki verður frádregið, nema tölurnar sè samkynja.

5. Viðbót. Reyna má samlagningu og frádragningu hvort rètt sè reiknaðar eða ekki, eptir sögnunum I, II, eða III í þessum tölulið. Samlagningin reynist með II eða III, en frádragningin með samlagningu eptir I, ellegar frádragning með frádragningu eptir III. Annars reynist samlagning hægast með því að leggja saman í annari eða gagnstæðri röð, þar það á að koma fyrir eitt, í hvaða röð lagt er saman (18).

26. Lærdómsgrein. Vaxi *minuendus,* þegar *subtrahendus* stendur í stað, vex einnig *differentia.* Vaxi *subtrahendus,* en *minuendus* standi í stað, þá minkar *differentia;* og þvert á móti, ef *minuendus* minkar eða *subtrahendus,* þá minkar eða vex *differentia.*

Sönnun. Því stærri sem summan verður, meðan hinn kunni samleggjandi stendur í stað, því stærri verður hinn annar samleggjandi, sem fyllir summuna. Þar á móti, ef summan stendur í stað, og hinn kunni samleggjandi vex, þá verður hinn annar, sem fylla skal summuna, að minka.

Hèr vex *minuendus* og þess vegna *differentia,* þegar *subtrahendus* stendur í stað.

15 — 8 = 7
16 — 8 = 8
17 — 8 = 9
18 — 8 = 10

Hèr vex *subtrahendus*, en *minuendus* stendur í stað.

15 — 8 = 7
15 — 9 = 6
15 — 10 = 5
15 — 11 = 4

27. Verkefni. Að draga eina tölu frá annari í tugakerfi, einkum þegar tölurnar eru stórar.

Úrlausn. Rita tölurnar hverja undir aðra, að samkynja einingar verði hver niður undan annari eins og í samlagningu (20). Byrja síðan hægra megin að draga frá. Venjulegast er, að *minuendus* sè ofar, þar undir *subtrahendus*, og svo fyrir neðan stryk *differentia*. þegar svo er niðurraðað, er frádrátturinn þannig, að efsti stafurinn verði jafn samtölu hinna tveggja neðri. Sè stafir jafnir í *minuendus* og *subtrahendus*, kemur *o* í *differentiu*. Sè minni stafur í *minuendus* en í *subtrahendus*, þá er tekinn til láns 1 tugur þess einingakyns, sem þá er verið að draga frá; er sá tugur tekinn sem einn af næsta staf í *minuendus* vinstra megin. En sè þessi næsti stafur *o*, þá verður ekki af honum lánað, heldur af þeim næsta staf vinstra megin, sem ekki er *o*, en öll milliverandi *o* verða þá álitin sem 9, þegar seinna skal draga frá þeim, og stafurinn fyrir framan þau minkar um 1. Dæmi getur bezt skýrt þetta alt saman, auk þess sem það er nákvæmlega kent í öllum reikningsbókum.

Dæmi. Frá 54876 skal draga 43974 þannig:

minuendus	54876	Kveð svo að orði: 4 frá 6 eru 2, skrifa
Subtrahendus	43974	2 neðan strykið, 7 frá 7 eru 0, skrifa
Differentia	10902	0; 9 frá 8 verður ekki dregið, þá

seg: 9 frá 18 er eptir 9, skrifa 9; 3 frá 3 (þar tekið var lán af 4) er 0, skrifa 0; 4 frá 5 eru 1. Ellegar eins og reglan er í ofanskrifaðri úrlausn, þá seg: 4 og 2 er 6, 7 og 0 er 7, 9 og 9 er 18, hvar sá til láns tekni tugur liggur í 4, 3 og 0 er 3, því búið er að skerða 4 um 1, 4 og 1 er 5. þannig má draga frá með samlagningu, svo varla er þörf að læra frádragningartöflu.

Annað dæmi:

854620003 648514567 206105436	Kveð svo að orði: 7 frá 13 er 6, 6 frá 9 er 3, 5 frá 9 er 4, 4 frá 9 er 5, 1 frá 1 er 0, 5 frá 6 er 1, 8 frá 14 er 6, 4 frá 4 er 0, 6 frá 8 er 2.

þriðja dæmi:

800304 278937 521367	Hèr mæl: 7 frá 14 er 7; 3 frá 9 er 6; 9 frá 12 er 3; 8 frá 9 er 1; 7 frá 9 er 2; 2 frá 7 er 5.

Sönnun: Að samkynja einingar ritast undir samkynja, leiðir af (14, 2), og (25), þar samleggjendur ekki geta gjört neina heild nema þeir sè samkynja, en í frádragningu er *minuendus* heildin, en *subtrahendus* og *differentia* deildir hennar. Að minkandi er heild frádraga og mismunar, sèst hèr á dæmunum, t. a. m. því fyrsta:

Subtrahendus	43974	} deildir
Differentia	10902	
Minuendus	54876	Heild.

Lántakan skýrist þannig:

$$\begin{array}{l}
54876 = 54000 + 876 = 53000 + 1876 \\
43974 = 43000 + 974 = 43000 + 974 \\
\hline
10902 = \qquad\qquad\qquad 10000 + 902
\end{array}$$

Af 54 þúsundum er hèr lánað 1 þúsund til 876; verður þá 1876, þar sem áður var 876, og 53000, þar sem áður var 54000. þar samleggjanda röð má vera eptir geðþekkni (18), þá má flytja tölu úr einum samleggjanda í annan, svo sem hèr úr 54000 í 876, án þess heildin 54876 raskist fyrir það.

Að öll milliverandi Núll, sem verða fyrir lántökunni, verði þá að 9, og næsti stafur fyrir framan þau minki um 1, skýrist þannig af þriðja dæmi:

$$\begin{array}{l}
800304 = 800000 + 300 + 4 = 799000 + 1290 + 14 \\
278937 = 278000 + 930 + 7 = 278000 + 930 + 7 \\
\hline
521367 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 521000 + 360 + 7
\end{array}$$

þar lána verður 1 tug til 4, til að geta dregið 7 þar frá, þá verða eptir af 30 tugum einungis 29 tugir, og því koma 9 í það sætið, er 0 var áður í, en 3 minka um 1. Eins þar lána verður 1 þúsund af 800 þúsundum til 29 tuga, til að geta dregið 93 tugi þar frá, þá verður 799 þúsund, þar sem áður var 800

þúsund; eru þá tvö 9 komin þar í staðinn fyrir tvö Núll, en 8 orðið að 7.

Að summan af 799000 1290 og 14 sè = 800304 má og sjá með því, að leggja tölurnar saman:

799000
1290
14
800304

28. Að draga fleiri tölur frá einni.

Úrlausn. Venjulegasta aðferðin er, að leggja fyrst alla frádragana saman og draga síðan summuna frá minkanda. Þetta er nokkur tvíverknaður; skemra verður, að leggja saman sèrhvert einingakyn í frádrögunum og draga summuna strax frá stafnum í minkanda, og ef þörf gjörist, taka til láns af hærra kyni svo margar einingar, að frádregið verði. Þessar til láns teknu einingar leggjast við fyrsta staf síns einingakyns, er saman skal leggja í frádrögunum, og verður þá stafurinn í minkanda látinn óskertur.

Dæmi:

33479	eða 33479 — 3103 — 13683 — 795 — 348 = 15550.
3103	Mæl svo: 8 og 5 er 13, og 3 er 16, og 3 er 19;
13683	frá 19 (í minkanda) er 0, rita 0 í mismuninn. 1 (tug-
795	ur lánaður) og 4 er 5, og 9 er 14, og 8 er 22; frá
348	27 í minkanda er 5, rita 5 í mismuninn. 2 lánaðir
15550	og 3 er 5 og 7 er 12, og 6 er 18 og 1 er 19 frá

24 í minkanda er 5, rita 5 í mismuninn. 2 lánaðir og 3 er 5, og 3 er 8, frá 13 í minkanda er 5, rita 5. 1 lánaður og 1 er 2, frá 3 í minkanda er 1, rita hann í mismuninn. Það væri gott að venja sig við að geta þannig frádregið í hinni kunngjörðu frádragningu, sem hèr stendur hægra megin, án þess að þurfa að skrifa tölur upp, svo þær standi hver niður undan annari, eins og hèr er vinstra megin.

Sönnun: Samlagning frádraganna er hèr auðskilin eptir áðursögðum reglum. Lántakan þar á móti er þar í frábrugðin þeirri áður sögðu, að stafurinn í minkanda vinstra megin er ekki skertur, heldur í þess stað stafur í frádraganum aukinn um sama, og kemur það fyrir eitt, þar lánið, sem rýra skal stafinn í minkanda, er einnig frádragi.

29. Að draga fleiri frádraga frá fleiri minköndum.

Úrlausn. Sú venjulegasta og ruglingsminsta aðferð er, að leggja saman minkendurna út af fyrir sig og frádragana sèr; sèst þá, hver summan meiri verður; er þá hin minni dregin frá hinni meiri, og ætlast menn til, að minkanda summan verði meiri. En beri út af því, þá setja menn — fyrir framan mismuninn, kallast hann þá neitandi stærð *(Quantitas negativa)*. þar á móti kallast mismunurinn játandi stærð *(Quantitas positiva)*, ef minkanda summan verður meiri, eins og gjört var ráð fyrir. En um neitandi stærðirnar verður meira talað síðar.

Önnur aðferð til þessa lærist bezt af dæmi og útskýringu þess, svo sem:

7589 + 3891 + 789 — 8483 — 235 — 769 — 869 = 1913
1121 1222

Mæl svo: 9 og 9 er 18 og 5 er 23, og 3 er 26, frá 29 er 3, rita 2 undir tuga einhvers frádraga, svo sem undir 6 í 869. þá 3 (sem komnir voru) og 1 er 4, og 9 er 13, rita 3 í aðalmismuninn, en 1 undir tugastaf einhvers minkanda, svo sem undir 8 í 7589. þá seg: 8 (ɔ: 6 og 2) og 6 er 14, og 3 er 17, og 8 er 25, frá 28 er 3; rita 2 lánuð hundruð undir 8 í 869. 3 og 9 er 12, og 9 (ɔ: 8 og 1) er 21, rita 1 í aðalmismuninn, en 2 hundruð undir 5 í 7589. Nú koma hundruðin: 10 (ɔ: 8 og 2) og 7 er 17, og 2 er 19, og 4 er 23, frá 27 er 4, rita 2 þúsund undir 869, en 4 og 8 er 12, og 7 (ɔ: 5 og 2) er 19, skrifa 9 í aðalmismuninn, en 1 þúsund undir 7 í 7589. Nú legg saman þúsundin: 2 (undir 869) og 8 (í 8483) er 10, frá 13 í 3891 er 3, og 8 (ɔ: 7 og 1) er 11, skrifa 1 í aðalmismuninn og 1 tíuþúsund undir 7589. Nú kemur til tíuþúsundanna: 1 undir 869, frá 1 undir 7589 er 0 eða ekkert. Verður því aðalmisunurinn 1913.

Sönnun. Alt þetta byggist á því, að einungis samkynja stærðir verða samanlagðar og frádregnar. þar af flýtur einnig, að minkendur verða að leggjast við minkendur og frádragar við frádraga, en aptur á mót minkendur og frádragar skerða hverjir aðra.

$$
\begin{array}{rrrr}
5U^3 + & 0U^2 + & 7U + & 6 \\
8U^3 + & 9U^2 + & 4U + & 3 \\
 & 6U^2 + & 3U + & 0 \\
 & 4U^2 + & 2U + & 1 \\
 & 8U^2 + & 0U + & 7 \\
\hline
\end{array}
$$

Úrlausn: $13U^3 + 27U^2 + 16U + 17$.

Sönnun: Samkynja stærðir eru hèr samanlagðar; en ekki verður kynbreitt nè lægri stèttir gjörðar að hærri stèttum, meðan menn ekki vita eða tiltaka, hvað margar einingar lægri stèttar fylla eina af hærri stètt.

Vilji eg láta þetta vera tugakerfi, þá er:

$$
\begin{array}{rcccccc}
13U^3 = & U^4 + & 3U^3 & & & & \\
27U^2 = & & 2U^3 + & 7U^2 & & & \\
16U = & & & U^2 + & 6U & & \\
17 = & & & & U + & 7 & \\
\hline
 & U^4 + & 5U^3 + & 8U^2 + & 7U + & 7 &
\end{array}
$$

og er þessi summa sama sem 15877 í tugakerfi, eins og lagt hefði verið saman:

$$
\begin{array}{r}
5076 \\
8943 \\
630 \\
421 \\
807 \\
\hline
15877
\end{array}
$$

Þar á móti ef $13U^3 + 27U^2 + 16U + 17$ ætti að vera tylftarkerfi, þá væri:

$$
\begin{array}{rcccccc}
13U^3 = & U^4 + & U^3 & & & & \\
27U^2 = & & 2U^3 + & 3U^2 & & & \\
16U = & & & U^2 + & 4U & & \\
17 = & & & & U + & 5 & \\
\hline
 & U^4 + & 3U^3 + & 4U^2 + & 5U + & 5 &
\end{array}
$$

sama sem 13455 í tylftarkerfi, eins og lagt hefði verið saman:

$$
\begin{array}{r}
5076 \\
8943 \\
630 \\
421 \\
807 \\
\hline
13455
\end{array}
$$

í tylftarkerfi.

23. Frumsagnir.

1. Jafnar stærðir lagðar við jafnar stærðir gefa jafnar summur.

t. d.	$7 = 3 + 4$	$a = b + c$
	$6 = 5 + 1$	$d = e + f$
	$13 = 8 + 5$	$a + d = b + c + e + f.$

2. Jafnar stærðir lagðar við ójafnar, ellegar ójafnar stærðir lagðar við jafnar, gefa ójafnar summur; hið meira verður þar, hvar meira var samanlagt.

$10 > 4 + 5$	$a > b + c$
$6 = 5 + 1$	$d = e + f$
$16 > 9 + 6$	$a + d > b + c + e + f.$
$20 = 12 + 8$	$a = b + c$
$12 < 14 + 2$	$d < e + f$
$32 < 26 + 10$	$a + d < b + c + e + f.$

Merkin $<$, minna merkið, og $>$, stærra merkið (*Signa minoritatis & majoritatis*) tákna, að sú stærðin sè meiri, sem opin snúa að, og sú minni, sem oddarnir snúa að.

24. Verkefni. Að leggja saman viðkendar tölur.

Úrlausn. Viðkendar tölur (inng. 5.) og margskonar leggjast saman eptir sömu reglum, að það, sem er sama kyns, er lagt saman, en ýmiskonar ritast hvað hjá öðru t. d.

Lyfjavigt	6 ℔	4 *Únzíur*	5 *Drökmur*	2 *Skrúplar*	15 *Grön.*
	5 —	3 —	4 —	1 —	12 —
	7 —	3 —	3 —	2 —	8 —
	18 ℔	11 *Únziur*	6 *Drökmur*	» *Skrúplar*	15 *Grön.*

(15 + 12 + 8) *Grön* = 35 *grön* = 1 *skrúpull* + 15 *grön. Skrúpullinn* legst við *skrúplana.* Þá (1 + 2 + 1 + 2) *skrúplar* = 6 *skrúplar* = 2 *drökmur.* Þær leggjast við *drökmurnar* (2 + 3 + 4 + 5) *drökmur* = 14 *drökmur* = 1 *únzia* 6 *drökmur. Únzian* legst við *únziurnar* (1 + 3 + 3 + 4) *únziur* = 11 *únziur.* (7 + 5 + 6) ℔ = 18 ℔.

Frádragning (*Subtractio*).

25. Orðþýðingar. Mismunur (*Differentia*) er sá samleggjandi, er með öðrum gefnum samleggjanda fyllir gefna summu. Hinn gefni samleggjandi heitir Frádragi (*Subtrahendus*), hin gefna

$$\cdots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \cdots$$

Hèr er hin eðlilega talnaröð hægra megin við 0, og vex upp í hægri hönd, stefnan til hægri er þá sú upphaflega, og tölurnar í henni *positivæ* eða settar eða játandi og teiknast með $+$, samber (31) og (33). Þar á mót vaxa tölurnar vinstra megin við 0 upp í vinstri hönd, sem er gagnstætt horf hinu upphaflega. Þær eru því neitandi stærðir (31) og táknast með $-$, (33). Hèr ímynda menn sèr tvær óendanlegar raðir: þá einu, sem er hin eðlilega talnaröð teiknuð með $+$, og hina aðra vaxandi í gagnstætt horf teiknaða með $-$. Millum þessara tveggja óendanlegu raða stendur 0 í miðju, sem hvorki er játandi nè neitandi, og horfir í hvoruga áttina, ellegar eins vel bæði játandi og neitandi og horfandi i báðar. Í þessari útvíðkuðu talnaröð kallast *negatífu* stærðirnar minni en 0, til þess að samhljóðun verði; því eins og að $+2$ er $< +3$, $+1 < +2$, $0 < +1$, svo er það samkvæmt, að -1 sè < 0, $-2 < -1$, $-3 < -2$ o. s. frv. Sömuleiðis er ∞ (óendanlega stór) meira en allar endanlegar játandi stærðir, 0 minna en allar játandi stærðir, neitandi stærðirnar minni en 0, og loksins $-\infty$ (*negatíf* óendanlega stór) minna en allar endanlegar neitandi stærðir.

36. Af því sem sýnt er í (35), fá *addition* og *subtraction* nýja þýðingu eða hugmynd. *Addition* er áframtalning, eða talning í sama horf eptir hinni útvíðkuðu talnaröð; *subtractionin* er apturábak talning eða talning í gagnstætt horf eptir hinni útvíðkuðu talnaröð.

t. d. $4 + 5 + 6 = 15$

$$\begin{array}{l}
0,+1,+2,+3,+4, \\
\qquad\qquad 0,+1,+2,+3,+4,+5 \qquad\qquad \cdots A \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0,+1,+2,+3,+4,+5,+6, \\
\hline
0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9,+10,+11,+12,+13,+14,+15.
\end{array}$$

Þetta er áframtalning. Eins $4 - 5 + 6 = 5$ þannig hugsað:

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad 0,+1,+2,+3,+4 \\
-5,-4,-3,-2,-1,\ 0 \qquad\qquad\qquad B \\
\qquad\quad 0,+1,+2,+3,+4,+5,+6 \\
\hline
\qquad\quad 0,+1,+2,+3,+4,+5
\end{array}$$

þetta er áframtalning í hinni útvíðkuðu talnaröð, því stærðirnar vaxa í sama horf eptir henni í öllum þremur *addendis*, þó að miðtalan vaxi í gagnstætt horf eptir hinni óútvíðkuðu.

þar röð samleggjanda má vera eptir geðþekkni (18), þá á þetta að vera sama sem $-5+4+6=5$

$$\begin{array}{l} -5,-4,-3,-2,-1,\ 0 \\ 0,+1+2,+3+4, \\ \qquad 0,+1,+2,+3,+4,+5,+6 \\ \hline \qquad 0,+1,+2,+3,+4,+5 \end{array} \qquad C$$

Eins er þetta samlagning: $-4-5-6=-15$.

$$\begin{array}{r} -4,-3,-2,-1,\ 0 \\ -5,-4,-3,-2,-1,\ 0 \quad \\ -6,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0 \qquad\qquad \\ \hline -15,-14,-13,-12,-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0 \end{array} \qquad D$$

Tölurnar vaxa hèr allar til hægri eptir hinni útvíðkuðu talnaröð, og er því áframtalning eða samlagning.

þar á móti er $9-(6)=+3$ frádragning (kunngjörð frádragning, er gefur sama sem $9-6=3$, sem er *algebraisk* samlagning).

$$\begin{array}{l} 0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9, \\ \qquad\quad +6,+5,+4,+3,+2,+1,\ 0 \\ \hline +3,+2,+1,\ 0 \end{array} \qquad E$$

Gefnu tölurnar vaxa hèr í gagnstæð horf, og er það tilbakatalning eða *subtraction*. Sama hefði framkomið af $9-6$ með því að leggja saman játandi stærð 9 og neitandi stærð -6 þannig:

$$\begin{array}{l} 0,+1,+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ \qquad\quad -6,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0 \\ \hline +3,+2,+1,\ 0 \end{array} \qquad F$$

Hèr sèst þá, að *negatif addendus* gefur sama sem *positif subtrahendus*.

Sömuleiðis er $9-(-6)=+15$ kunngjörð frádragning, þannig hugsuð:

$$\begin{array}{l} 0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0,-1,-2,-3,-4,-5,-6, \\ \hline +15,+14,+13,+12,+11,+10,+9,+8,+7,+6,+5,+4,+3,+2,+1,\ 0 \end{array} \qquad G$$

Gefnu tölurnar hafa gagnstæð horf. *Minuendus* vex til hægri, en

subtrahendus til vinstri eptir útvíðkaðri talnaröð, þess vegna er það apturábaktalning.

Sama hefði framkomið af samlagningu $9 + 6 = 15$ þannig:

$0+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9$ *H*

$0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,$

$0+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9,+10,+11,+12,+13,+14,+15.$

Hèr sèst, að *positif addendus* gefur sama sem *negatif subtrahendus*.

Loksins er $-9-(-6)=-3$

$-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0$ *I*

$0,-1,-2,-3,-4,-5,-6$

$0,-1,-2,-3.$

Minuendus vex til hægri, *subtrahendus* til vinstri, og er það apturábaktalning. Sama kæmi fram af $-9+6$ eða ef lagt væri saman neitandi stærð -9 og játandi stærð 6.

$-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,\ 0$

$0+1,+2,+3,+4,+5,+6$ *K*

$0,-1,-2,-3.$

Hèr sèst það einnig, að *positif addendus* gefur sama sem *negatif subtrahendus*. Þess vegna er

$$-(-a)=+a$$

$$-[-(-a)]=-a$$

$$-\{-[-(-a)]\}=+a$$

og yfir höfuð: oddatala af *minusum* er *mínus*, en jöfn tala af *minusum* er *Plus*. Þetta má og skoða þannig: einu sinni umsnúið er öfugt, tvisvar umsnúið er rètt, þrisvar umsnúið er öfugt, 4 sinnum umsnúið er rètt. Oddatala umsnýr, jöfn tala gjörir rètt.

37. Verkefni. Að leggja saman tölur í hinni útvíðkuðu talnaröð.

Úrlausn. Tölur með líkum merkjum (svo sem + og + eða — og —) leggjast saman, og summan fær sama merki. Tölur með ólíkum merkjum (+ og — eða — og +) dragast frá, það er að skilja: minni talan frá hinni meiri, og summan fær merki hinnar meiri. Hèr á meiri og minni að skiljast eptir venjulegum hætti.

Sönnun. Samhljóða stærðir, sem báðar hafa + eða báðar

— (31), hafa sama horf, og eru því einnig að horfinu samkynja, auk þess sem þær eru að öðru leyti samkynja, þær færa þá áfram í sama horfið báðar, og sameinast hvor annari með *númeriskri* ɔ: tölulegri samlagningu, eða samlagningu í venjulegum skilningi. Hafi þær + báðar, þá eru þær *addendi*, og sameina sig í einn *addendus;* hafi þær báðar —, þá eru þær *subtrahendi* og sameina sig í einn *subtrahendus*. Þess vegna fær og summa þeirra sama merki sem þær, því hún verður samkynja þeim, *addendus* ef þær eru *addendi*, og *subtrahendus* ef þær voru *subtrahendi*. Samber (36 *A* og *D*). Hèr er *addendus* og *subtrahendus* teknir í óútvíðkaðri merkingu.

Hafi stærðirnar ólík merki, önnur + en hin —, þá eru þær gagnstæðar (31) og hafa gagnstæð horf, þó þær að öðru leyti sè samkynja. Hin minni færir þá aptur á bak úr því horfi, sem hin stærri færði í, og nemur þannig af henni svo mikið sem hún sjálf (hin minni) er stór til. Samber (36 *F* og *K*). Þær sameinast því með frádragningu í venjulegum skilningi eða *númeriskri subtraction* (tölulegri frádragningu). Sú *algebraiska* summa þeirra verður þá þeirra *númeriski* mismunur, eða hinnar stærri fyllandi deild (25, 1) og merkið, sem sú *algebraiska* summa fær, verður það, sem sú fyllandi deild hefir, eða hið sama, sem sá óeyddi hluti hinnar stærri hefir, er hin minni ekki gat til náð, þess vegna einmitt merki hinnar stærri í venjulegum skilningi. Sè hinar gagnstæðu stærðir jafnar, þá eyða þær svo hvor annari, að þeirra *algebraiska* summa verður = 0, og þarf ekkert merki að hafa.

Dæmi:			
	+ 4	— 4	+ 4
	+ 5	— 5	— 5
	+ 8	— 8	+ 8
	+ 16	— 16	— 16
	+ 33	— 33	— 9

Þegar gefið er ártal Krists við einhvern tiltekinn merkistilburð, og frá þeim tilburði tímabil til annars tilburðar, svo frá þeim öðrum til hins þriðja o. s. frv., þá verður ártal Krists við seinast talda tilburðinn = ártali Krists við hinn fyrsta að tillögðum öllum tímabilunum. Nú var Rómaborg bygð ár fyrir Guðsburð 753, Alexander mikli dó 430 árum síðar; Trója var eyðilögð 861 ári fyrr en Alexander dó, eptir því sem sumir skrifa. *Cal-*

marunionin skeði 2581 ári síðar en Trója var eydd hèr um bil, og einvaldsstjórnin var innfærð í Danmörk 263 árum síðar en *Calmarunionin* gjörðist. Hvaða ár Krists var einveldið innfært í Danmörku?

Rómaborg bygð ár Krists	—	753	
Alexander dó 430 árum síðar	+	430	
Trója eydd 861 ári fyrri	—	861	hèr um bil.
Calmarunionin gjörðist 2581 ári síðar	+	2581	nærfelt.
Einveldi innfært í Danmörk 263 árum síðar		263	
Svar: ár eptir Guðsburð	+	1660	

Hèr setjast tímabilin með +, sem vaxa eptir framskriði tímans, en hin með —, sem vaxa móti framrás tímans. Summan + 1660 verður þá samkvæm þessu og þess vegna stærð vaxandi eptir tímans rás, það er, að einveldið hafi verið innfært í Danmörk 1660 árum eptir (en ekki fyrir) Krists fæðingu.

það kemur fyrir eitt í hvaða röð menn leggja þetta saman (18), þess vegna hvort teknar eru samhljóða stærðirnar fyrst og lagðar saman, og síðan hinar gagnstæðu summur þeirra *numerice* frádregnar, sú minni frá hinni meiri, ellegar menn taka gagnstæðu stærðirnar saman og draga þá minni *numerice* frá hinni meiri. þægilegt er, þegar tölurnar eru margar, að skrifa þær í tvo dálka þannig:

+	—
430	753
2581	861
263	1614
+ 3274	
— 1614	
+ 1660	

Skip siglir frá einum stað rètt í suðaustur 41 mílu, það er frá höfuðáttunum 29 mílur til suðurs og 29 til austurs; svo í rètt suður 50 mílur, það er 50 mílur í suður og ekkert í austur; svo í vestsuðvestur 13 mílur, það er 5 mílur til suðurs og 12 til vesturs; svo í vestur til norðurs 51 mílu, það er 10 mílur til norðurs og 50 til vesturs; svo í norður til vesturs 154 mílur, það er 151 mílu til norðurs og 30 mílur til vesturs. Hvað er skipið þá langt burt frá sínum upphaflega stað eptir þeim 4 höfuðáttum? Eg ætla að kalla + til suðurs og þá undir eins

— til norðurs; líka ætla eg að kalla + til austurs og þá — til vesturs. Þá er:

			í suður		í austur
SA	41 míla	= +	29 mílur	og	+ 29 mílur
S	50 mílur	= +	50 mílur		0 mílur
VSV	13 mílur	= +	5 mílur	og	— 12 mílur
V til N	51 mílu	= —	10 mílur	og	— 50 mílur
N til V	154 mílur	= —	151 mílu	og	— 30 mílur
		—	77 mílur		— 63 mílur.

Skipið er þá komið 77 mílur til norðurs og 63 mílur til vesturs frá sínum upphaflega stað.

Nú skyldi skipið sigla lengur, og fara þaðan, sem það er komið í suðsuðaustur 26 mílur, það er 24 mílur til suðurs og 10 til austurs, svo í vestur 13 mílur, það er ekkert í suður, en 13 í vestur; svo í suðaustur til suðurs 18 mílur, það er 15 mílur til suðurs og 10 til austurs; svo í suðaustur 58 mílur, það er 41 mílu til suðurs og 41 mílu til austurs; svo í norður 13 mílur, það er 13 mílur í norður og ekkert í austur. Hvar er skipið þá eptir þessa siglingu?

			í suður		í austur
Skipið var komið		=	— 77 mílur	og	— 63 mílur
SSA	26 mílur	=	+ 24 mílur		+ 10 mílur
V	13 mílur	=	0		— 13 mílur
SA til S	18 mílur	=	+ 15 mílur		+ 10 mílur
SA	58 mílur	=	+ 41 mílu		+ 41 mílu
N	13 mílur	=	— 13 mílur		0
SA til A	18 mílur	=	+ 10 mílur		+ 15 mílur
			0		0

Þar hinar *algebraisku* summur í báðum dálkunum eru = 0, þá er skipið komið aptur á sínar fyrstu stöðvar.

Það kennir siglingalistin og þríhyrningafræðin, hvað hver ein skástefna á vissri fjarlægð færir langt burt frá höfuðáttanum. En sá sem ekki hefir þess háttar áhöld, getur samt mælt það með sirkli, ef hann kann að draga upp áttavitarósina (*Compásinn*). Sá hèr sýndi reikningur er þó ekki nákvæmur, vegna þess þar er ekki gjört ráð fyrir, að jörðin sè hnöttótt, heldur flöt, hvað að vísu vel má takast, þegar ekki er um nema lítið svæði að gjöra, svo að ávali jarðarinnar að mestu hverfi; en hèr er skipið

látið slaga um ofstórt svæði til þess. Þó skakkar aðferð þessari um miðjarðarlínuna nærri ekkert, en þar á mót því meira sem frá henni dregur. Það á hèr öldungis ekki við, að fara lengra inn í þetta efni. Tilgangur þessa dæmis er einungis að gefa lítið sýnishorn af því, hvað tölvísin græðir mikið við útvíðkun hinnar eðlilegu talnaraðar og við skoðun hinna gagnstæðu stærða. Það er bæði í flóknum reikningum og í reikningi ótiltekinna stærða (Inng. 6), að menn öldungis ekki vita, hvorum megin stærðirnar eru við Núll, eða hvenær þær fara yfirum það, eða hvernig þær umsnúast.

38. Verkefni. Að draga tölur frá í hinni útvíðkuðu talnaröð.

Úrlausn. Breyt merkjunum í frádraganum í hin gagnstæðu, og rita hið nýja merki neðan undir hið gamla. Legg síðan saman eptir hinum nýju merkjum samkvæmt (37) t. d.

1. Samhljóða játandi		2. Samhljóða neitandi	
Minkandi	$+$ 9 Dæmið (36 *E*)	Minkandi	$-$ 9
Frádragi	$+$ 6	Frádragi	$-$ 6
	$-$		$+$
Mismunur	$+$ 3	Mismunur	$-$ 3
3. Gagnstæðar, neitandi frádragi		4. Gagnstæðar, játandi frádragi	
Minkandi	$+$ 9 Dæmið (36 *G*)	Minkandi	$-$ 9
Frádragi	$-$ 6	Frádragi	$+$ 6
	$+$		$-$
Mismunur	$+$ 15	Mismunur	$-$ 15

1. Sönnun. Í fyrsta dæminu er *positif subtrahendus* $+$ 6, en hann gildir sama sem *negatif addendus* (36 *F*). Í öðru dæminu er *negatif subtrahendus* $-$ 6, hann gildir því við *positif addendus* $+$ 6 (36 *H*). Þriðja dæmið er eins og hið annað, og 4. dæmið eins og hið fyrsta.

2. Sönnun.

Heild $=$ Deild $+$ Fyllideild (25 *I*)
eða Minkandi $=$ Frádragi $+$ Mismunur (25).

1. dæmi	$9 = 6 + 3$	Samanlagt eptir (37).
2.	$-9 = -6 - 3$	
3.	$9 = -6 + 15$	
4.	$-9 = 6 - 15$	

Þessi sönnun sýnir, að sú tala, sem fundin er eptir framanskrif-

aðri reglu, sè fyllingin eða fyllideildin milli minkanda og frádraga, og þess vegna sá sanni mismunur.

Viðbót. Af (37) og (38) sèst, að *additio* og *subtractio* eru sín á milli mjög líkar, og mismuna einungis þar í, að *additio* er áframtalning, en *subtractio* talning aptur á bak (36). Í bókstafareikningi, sem er reikningur ótiltekinna talna (Inngang. 6), álízt $a + b$ að vera summa tveggja talna a og b, meðan þær eru ótilteknar, en skeð getur, að þegar þær með einhverju móti verða fastsettar eða ákvarðaðar í tölum, að sú áður álitna samtalning verði að frádragningu; og það verður, ef önnurhvor talan verður *negatif*. Einnig getur það skeð, þegar til talnanna kemur, að önnurhvor eða báðar verði 0, og þá verður ekki af neinni samlagningu. Þar á mót álízt $a - b$ að vera frádragning eða mismunur tveggja talna a og b. hvar af a sè hin stærri og b hin minni. En þetta getur ýmislega farið, þegar tölurnar ákvarðast; það getur orðið úr því samlagning, ef önnurhvor talan er *negatif*; það getur líka móti von manns b orðið stærra en a, og þá verður $a - b$ *negatif* stærð.

39. Orðþýðingar. Bókstafastærðir geta verið samsettar af ýmislegum liðum *(Termini)*, sem greinast með + eða —.

Monomium (einliðuð stærð) kallast sú bókstafastærð, sem einungis hefir 1 lið, svo sem $4a^3$.

Binomium (tvíliðuð), sem hefir tvo liði, t. d. $a + b$, eða $a - b$, eða $4a^3 + 5b$.

Trinomium (þríliðuð) hefir 3 liði, t. a. m. $a + b - c$.

Polynomium (margliðuð) t. d. $a + b + c + d$. *Formulan* í (9) hèr að framan er *polynomium*.

40. Verkefni. Að leggja saman bókstafastærðir.

Úrl. Sè það *positif monomia*, þá er það áður kent (21). En sè fleiraslags stærðir, þá takist allir þeir liðir saman, sem hafa sömu bókstafi með sömu *exponentum*, og af þessum aptur þeir, sem hafa sama merki + eða —. *Coefficientarnir* í þessum samkynja liðum leggist saman eptir (37); kemur þá fram *coefficient* summunnar; skrifast svo aptan við hann þeir tilheyrandi bókstafir með þeirra *exponentum*. Þannig skal áfram halda, unz allir liðirnir í samleggjöndunum eru komnir í summuna. Sè þar og liðir, sem eru tómar tölur, leggjast þeir saman eptir sömu reglum.

Dæmi. Skuli leggja saman:

$5a^3c + 4ad + 7a^3c - 4a^3c - 8ad + ad.$

Hèr er þægilegt að skrifa samkynja liðina hvern undir annan, svo:

$$\begin{array}{rl} & 5a^3c + 4ad \\ & 7a^3c - 8ad \\ & -4a^3c + ad \\ \hline \text{Summa} & 8a^3c - 3ad \end{array}$$

Coefficientarnir $+ 5 + 7, - 4$ leggjast saman eptir (37). Verður summan $= + 8$; það er þá samtals $8a^3c$. Sömuleiðis er $+ 4 - 8 + 1 = - 3$, það er $- 3ad$. Verður þá aðalsumman $8a^3c - 3ad$.

2. dæmi.
$$\begin{array}{rrrr} & 7fd & + 3xz & - 5d^2 \\ & -8fd & - 7xz & - 8d^2 \\ & -12fd & + 8xz & + 11d^2 \\ & -5fd & + 4xz & - 2d^2 \\ & 18fd & - 7xz & + 4d^2 \\ \hline \text{Summa} & & xz & \end{array}$$

það er merkilegt við þetta dæmi, að það gjörir ekkert til í summunni, hvaða merkingu í tölum stafirnir f og d hafa, vegna þess þeir liðir vinna sig upp, sem þeir stafir koma fram í. það er annað merkilegt, að ef annaðhvort x eða z verður $= o$, þá verður öll summan $= o$, hvað sem allir hinir stafirnir þýða.

3. dæmi. Hvaða summa verður af því, þegar summa tveggja talna legst við sömu talna mismun? Kalla tölurnar a og b, þá verður summa þeirra $a + b$. Lát enn framar í þeim kunngjörða mismun a vera *minuendus* og b *subtrahendus*, þá verður $a - b$ sá kunngjörði mismunur. Reikningurinn stendur þá svo:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline 2a \end{array}$$

Svarið verður þá: Summan verður ætíð $=$ tvöfaldri þeirri tölunni, sem í mismuninum var látin vera *minuendus*. Hin talan, sem er *subtrahendus*, gjörir ekkert til, heldur hverfur burt úr reikningnum.

4. dæmi Höfum nú í sama dæmi tölurnar tilteknar. Setjum $a = 174$ og $b = 98$, þá verður

$$\begin{array}{lll} a + b & = 174 + 98 = 272 \\ a - b & = 174 - 98 = 76 \\ \hline 2a & = 348 = 348 & = (a + b) + (a - b). \end{array}$$

Hèr kemur það fram, sem bókstafareikningurinn sýndi, að summan er = þeim tvöfalda *minuendus*, því 2svar 174 er 348.

5. dæmi. Höfum nú tölurnar aptur ótilteknar, en setjum þær sè sín á milli jafnar. Þá notast einungis annar bókstafurinn, svo sem a, þannig:

$$\begin{array}{ll} a + b & = a + a = 2a \\ a - b & = a - a = o \\ \hline (a + b) + (a - b) = 2a & = 2a \end{array}$$

Hèr kemur það enn fram, að summan er = 2földum *minuendus*.

Reynum nú að hafa b fyrir báðar tölurnar, þá verður:

$$\begin{array}{ll} a + b & = b + b = 2b \\ a - b & = b - b = 0 \\ \hline (a + b) + (a - b) & = 2b = 2b \end{array}$$

Hèr er enn summan = 2földum *minuendus*.

6. dæmi. Látum í sama dæmi a vera = 0, en b vera ótiltekið; þá er

$$\begin{array}{ll} a + b & = 0 + b = b \\ a - b & = 0 - b = -b \\ \hline (a + b) + (a - b) & = 0 = 0 \end{array}$$

Hèr kemur enn sú fundna regla eða lögmál fram, því tvisvar 0 er 0.

7. dæmi. Látum loksins *minuendus* vera *negatif* tölu, svo sem — 36, en *subtrahendus* ótiltekinn.

$$\begin{array}{ll} a + b & = -36 + b \\ a - b & = -36 + b \\ \hline (a + b) + (a - b) = -72 & \end{array}$$

Enn kemur sama reglan fram, því tvisvar — 36 er = — 72.

Sönnun úrlausnarinnar grundvallast á þeirri höfuðreglu, að alt, sem samkynja er, legst saman og dregst frá hvað út af fyrir sig, svo það verði í einu lagi. Þar sem tómar tölur eru, má alíta þær sem *coefficienta*, hverra bókstafur þýði 1. Samber (14, 2).

41. Verkefni. Að draga bókstafastærðir frá bókstafastærðum.

Úrlausn. Breyt merkjunum í *subtrahendus* í hin gagnstæðu. Legg síðan saman eptir (40), og far eptir nýju merkjunum, sem skrifuð eru neðan undir hin gömlu.

Dæmi.

$$\begin{array}{rrrrrl} -7f & +3m & -8x & & & \textit{Minuendus} \\ -6f & -5m & -2x & +3d & -8 & \textit{Subtrahendus} \\ + & + & + & - & + & \\ \hline -f & +8m & -6x & -3d & +8 & \textit{Differentia.} \end{array}$$

Látum nú f vera $= 8$, $m = 7$, $d = -10$, en maður skyldi ei vita, hvað x væri, þá verður þetta í tölum:

$$\begin{array}{rrrrr} -56 & +21 & -8x & & \\ -48 & -35 & -2x & -30 & -8 \\ + & + & + & + & + \\ \hline -8 & +56 & -6x & +30 & +8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} = & -35 & -8x \\ = & -121 & -2x \\ & + & + \\ \hline & +86 & -6x. \end{array}$$

Hèr kemur fyrir eitt, hvort lögð er saman hver lína sèr, eptir merkjunum, og síðan frádregið, ellegar menn leggja saman eða draga frá upp og ofan; mismunurinn verður alt af hinn sami.

Sönnun. Þegar breytt er merkjunum í frádraga, þá umsnýst hann eða verður öfugur við það sem hann var, hann verður því *negatif* við sjálfan sig, og þegar hann þannig undirbúinn legst við minkanda, þá kemur það fram, sem áður er sýnt (36 F), að *negatif addendus* er sama sem *positif subtrahendus*. Menn geta einnig sannfært sig um, að sá þannig fundni mismunur sè rèttur, með því að leggja hann við *subtrahendus*, og á þá að koma fram *minuendus* (25 *I*), ellegar með því að draga hann frá *minuendus* (25. *III*), þá á að framkoma *subtrahendus*. Reynum eptir fyrri aðferðinni (25. *I*)

$$\begin{array}{rrrrrl} -6f & -5m & -2x & +3d & -8 & \textit{Subtrahendus} \\ -f & +8m & -6x & -3d & +8 & \textit{Differentia} \\ \hline -7f & +3m & -8x & & & \textit{Minuendus.} \end{array}$$

Viðbót. Stundum kunngjöra menn *subtrahendus* með því að loka hann inn í sviga, og rita *minus* fyrir framan. Menn geta þá, einkum ef reikningurinn er ekki flókinn, dregið frá með því móti, að breyta merkjunum í *subtrahendus* í huga sèr og leggja svo saman.

Dæmi, hvar í eru tveir frádragar:

$37a - 5f - (3a - 2b - 5c) - (6a - 4b + 3h)$,

má ef vill skrifa það upp þannig:

$37a - 5f - 3a + 2b + 5c - 6a + 4b - 3h = 28a - 5f + 6b + 5c - 3h.$

42. **Frumsagnir.**

1. Jafnar stærðir dregnar frá jöfnum stærðum gefa jafna mismuni:

$$\begin{array}{ll} a = b & 10 = 6 + 4 \\ m = n & 7 = 6 + 1 \\ \hline a - m = b - n & 3 = \phantom{6+{}} 3 \end{array}$$

2. Jafnar stærðir dregnar frá ójöfnum stærðum gefa ójafna mismuni; sá stærri mismunur verður þar, sem meiri var minkandi.

$$\begin{array}{ll} a > b & 10 > 6 + 3 \\ m = n & 7 = 6 + 1 \\ \hline a - m > b - n & 3 > \phantom{6+{}} 2 \end{array}$$

3. Ójafnar stærðir dregnar frá jöfnum stærðum gefa ójafna mismuni; hið meira verður þar, hvar minna var frádregið.

$$\begin{array}{ll} a = b & 10 = 6 + 4 \\ m > n & 7 > 3 + 2 \\ \hline a - m < b - n & 3 < 3 + 2 \end{array}$$

4. Minna og stærra dregið frá stærra og minna gefur stærra og minna

$$\begin{array}{ll} a > b & 10 > 6 + 3 \\ m < n & 7 < 5 + 4 \\ \hline a - m > b - n & 3 > 1 - 1. \end{array}$$

43. Verkefni. Að draga viðkendar tölur frá viðkendum tölum.

Úrlausn. Viðkendar eða fleirkonar tölur dragast frá þannig, að samkynja er dregið frá samkynja.

Dæmi.

254 álnir	16 þuml.	10 línur
32	20	8
221 álnir	20 þuml.	2 línur.

Hèr má hafa ýmislegar aðferðir. Hin venjulegasta er að segja svo: 8 línur frá 10 er 2 línur; skrifa þær í mismuninn. 20 þuml frá 16 verður ekki dregið, þá er venjulegt að taka 1 alin til láns af álnunum; hún er 24 þumlungar; hana má leggja við 16 þumlunga, verður $24 + 16 = 40$, þá drag 20 frá 40, er eptir

20 þuml., sem skrifast í mismuninn. Raunar er óþarfi að leggja saman 24 + 16, hægra er að segja: 20 þuml. frá 24 þumlungum (sem er sú til láns tekna alin) er eptir 4, og þar til 16 þuml. er 20 þuml., því þegar 20 þuml. skulu dragast frá 24 + 16, gildir einu, frá hverjum af þessum samleggjöndum er dregið, og er þá hægast að draga 20 frá 24, en leggja þá 4, sem afgangs verða, við hinn samleggjandann 16, koma þá 20 þumlungar. Síðan dragast 32 álnir frá 253 álnum (þar búið er að lána af 254), koma 221 alin. Hèr mátti líka draga 20 þuml. frá 16 þuml. og láta verða *negatif* mismun = — 4 þuml., draga svo 32 áln. frá 254 álnum, koma 222 álnir; en þá hefði mismunurinn orðið svo:

222 áln — 4 þuml, 2 línur,

sem strax má skrifa þannig:

221 alin 20 þuml. 2 línur,

því sú eina alinin = 24 þuml., verður að skerðast um þá *negatifu* 4 þuml., svo þar af koma 20 þuml. Þannig má, þegar í mismuninum kemur *negatif* tala, eða — á eptir (þegar þú gengur frá vinstri til hægri), skerða töluna, sem þú ert með, um 1.

Dæmi upp á þessa aðferð:

4 faðmar	» álnir	1 kvartil	» þuml.
3	2	2	5
1 faðm. —	2 aln. —	1 kv. —	5
ɔ: 0 faðm.	0 al.	2 kv.	1 þuml.

Hèr má byrja frádráttinn vinstra megin, og svo mæla: 3 faðm. frá 4 er 1 faðm, sem skrifast. Svo 2 alnir frá engri alin er — 2 álnir sem skrifast. Svo 2 kvartil frá 1 kvartili er — 1kvartil, sem skrifast. Loksins 5 þumlungar frá 0 þuml. er — 5 þuml., sem skrifast. Síðan má snúa þessum *minusum* í *plusa* þannig: Skrifa 0 faðm., en ekki 1 faðm, þar — 2 álnir koma á eptir, þær 2 álnir frá 3 (sem í faðmi eru) gefa 1 al.; en þar — 1 kvartil kemur á eptir, skrifast 0 al. Þetta 1 kvartil frá 4 kvartilum (í alin) gefur 3 kvartil, en þar — 5 koma á eptir, skrifast 2 kvartil; þeir 5 þuml. frá 6 gefa 1 þuml.; skrifa hann, þar ekkert *minus* kemur á eptir. Í staðinn fyrir að skrifa 0 faðm og 0 alin, mátti líka láta þau sæti auð, svo allur mismunurinn verður 2 kvartil og 1 þumlungur, og hann gat maður raunar skrifað strax, með því að líta fram undan sèr, hvort lána mundi þurfa eða ekki.

Sá venjulegi máti að reikna þetta dæmi, er svo: 5 þuml. frá 6 (lánað 1 kvartil) er 1 þumlungur, sem skrifast. 2 kvartil frá 4 kvartilum (1 alin lánuð) er eptir 2 kvartil; en 1 kvartil var tekið til láns áður, og má því ekki bæta því þar við. Þar skrifast því 2 kvartil í mismuninn. Svo 2 álnir frá 2 álnum, (því af 3 álnum í faðmi, sem lána þarf, er tekinn 1), er ekkert. Og loksins 3 faðmar frá 3 föðmum (því 1 faðmur var lánaður til álnanna), verður ekkert eptir.

44. Þegar fleiri *subtrahendi* skulu frádragast, nota menn opt tugfyllingu *(decadisk Complement)* í stað aðferðarinnar (29). Tugfyllingin fæst með hægu móti, með því að byrja við vinstri hönd að draga hvern staf í frádraga frá 9, en seinasta staf, sem ekki er 0, frá 10, t. d. hafi maður *subtrahendus* 78080, þá

í staðinn fyrir — 78080

skrifa þegar 21920 Tugfylling.

Þetta er sama sem þannig væri dregið frá:

$$\begin{array}{r} 100000 \\ -\ \ 78080 \\ \hline 21920 \end{array}$$ sem er tugfylling til 100000.

Í stað þess að draga 78080 frá þeim gefnu samleggjöndum má leggja 21920 við, en draga 100000 frá, því

$$-\ 78080 = -\ (100000 - 21920) = -\ 100000 + 21920$$

eptir (41, Viðbót). En eptir á að draga 100000 frá summunni er hægt, því ekki þarf nema draga 1 frá hundraðþúsundastafnum eða þeirri einingastètt, sem tugfyllingin er tekin til. Þetta má kunngjöra með því að rita $\bar{1}$ (það er — 1) framan við tugfyllinguna, að það lendi í sæti þeirrar einingastèttar, sem tugfyllingin er tekin til, þannig:

$$\bar{1}21920$$

Síðan er alt lagt saman, en þessar *negatifu* einingar dregnar frá, hver í sínu sæti. Dæmið (29) verður þá þannig meðfarið og skýrt:

$$\begin{array}{rcccl}
7589 & \ldots\ldots = \ldots\ldots & 7589 & = & 7589 \\
3891 & \ldots\ldots = \ldots\ldots & 3891 & = & 3891 \\
789 & \ldots\ldots = \ldots\ldots & 789 & = & 789 \\
-\ 8483 = & -(10000 - 1517) = & -\ 10000 + 1517 & = & \bar{1}1517 \\
-\ 235 = & -\ (1000 - 765) = & -\ 1000 + 765 & = & \bar{1}765 \\
-\ 769 = & -\ (1000 - 231) = & -\ 1000 + 231 & = & \bar{1}231 \\
-\ 869 = & -\ (1000 - 131) = & -\ 1000 + 131 & = & \bar{1}131 \\
\hline
 & & -\ 13000 + 14913 & = & 1913
\end{array}$$

Einungis dálkurinn næst hægri hendi þarf að skrifast. Einingar tugir og hundruð í honum leggjast saman eptir venjulegum hætti, verða þá geymd 3 þúsund til þúsundaraðarinnar. En þessar 3 þúsundir falla burt vegna hinna *negatifu* 3 þúsunda, sem koma í fjórðu röð; en svo koma þar fyrir ofan $1 + 3 + 7 = 11$ *positif* þúsundir, af þeim 11 skrifast þá 1 undir, eptir samlagningarreglum (20); er þá komin í summuna 1913, en tugastafurinn í 11 legst við fimtu röð. Þessi *positifa* eining 1 kemur þá saman við $\bar{1}$, sem þar er fyrir, og vinna þær hvor aðra upp, svo ekkert kemur þar í summuna. Verður þá summan 1913, eins og áður er fundið.

Annað dæmi:

$$\begin{array}{rcr}
4567 & = & 4567 \\
-\ 7890 & & \bar{1}2110 \\
5432 & & 5432 \\
-\ 456 & & \bar{1}544 \\
25 & & 25 \\
-\ 2345 & & \bar{1}7655 \\
46 & & 46 \\
-\ 38 & & \bar{1}62 \\
\hline
 & & \bar{1}9341 \\
 & = & -\ 659
\end{array}$$

Þegar *negatifa* stærðin — 7890 kemur, les eg að sönnu 7890, og hugfesti, svo eg ekki þurfi að lesa töluna í bókinni nema einu sinni. En þegar eg fer að skrifa hana, skrifa eg 2 fyrir 7, 1 fyrir 8, og 1 fyrir 9, þar ekkert nema 0 kemur á eptir, því þar dregst 9 frá 10, en ekki 9 frá 9. Að því búnu set eg $\bar{1}$ fyrir framan í 10000^{a} rúmið. Eins er farið með hinar *negatifu* stærðirnar. Að því búnu er alt lagt saman, en *negatifu* stafirnir dragast frá, kemur þá summan $\bar{1}9341$. Er þá auðséð, að það er *negatif* stærð. Til að fá hana samhljóða, verður að minka *negatifa* stafinn um einn, kemur þar þá 0: taka síðan tugfyllingu af hinum stöfunum, kemur þá 0659 sem er $= -\ 659$ því,

$$\bar{1}9341 = -\ 10000 + 9341 = -\ 659.$$

Sama summa — 659 kemur út, ef lagðar eru saman *positifu* tölurnar sèr, og *negatifu* sèr þannig:

$$\begin{array}{r} +\ 4567 \\ 5432 \\ 25 \\ 46 \\ \hline +\ 10070 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 7890 \\ 456 \\ 2345 \\ 38 \\ \hline -\ 10729 \\ +\ 10070 \\ \hline -\ 659 \end{array}$$

Þriðja dæmi:

$$\begin{array}{rcll} & 2467 & = & 2467 \\ - & 311 & = & \bar{1}689 \\ - & 240 & = & \bar{1}760 \\ - & 200 & = & \bar{1}800 \\ - & 496 & = & \bar{1}504 \\ - & 193 & = & \bar{1}807 \\ - & 800 & = & \bar{1}200 \\ - & 1000 & = & \bar{1}000 = \bar{1}9000 \\ - & 999 & = & \bar{1}001 \\ - & 989 & = & \bar{1}011 \\ \hline - & 2761 & & \bar{3}239 \end{array}$$

Það kemur fyrir eitt hvort — 1000 er skrifað $\bar{1}000$ eða $\bar{1}9000$, því $\bar{1}9000$ er sama sem:

$$\left.\begin{array}{r} -\ 10000 \\ +\ 9000 \end{array}\right\} \atop \overline{-\ \ 1000}$$

og að $\bar{1}000 = -\ 1000$ er auðsèð af *Numerationinni* (3) því $\bar{1}$ þýðir *negatif* þúsundasta í sínu sæti, og það er sama sem *negatifa* talan — 1000, því núllin gjöra ekki annað en fylla auðu sætin, svo að þúsundastafurinn fái sitt rètta sæti. Þegar nú búið er að leggja saman, kemur summan $\bar{3}239$, og til að snúa henni í venjulega skript, minkar maður *negatifa* tölustafinn $\bar{3}$ um einn, (því hinir stafirnir lána af honum), skrifar síðan 7 fyrir 2, 6 fyrir 3 og 1 fyrir 9, eins og áður er kent, hvað eð læra má af þessu:

$$\bar{3}239 = -3000 + 239 = \left\{\begin{array}{r} -\ 3000 \\ +\ \ 239 \\ \hline -\ 2761 \end{array}\right.$$

Standi sá *negatifi* tölustafur ekki fyrst í tölunni, verður að fara öðruvísi að: en það lærist með því, að rita töluna í tvennu lagi eins og hèr var gjört. Þetta dæmi má og reiknast í fyrra dálkinum eptir (28). En þá verður í þúsundaröðinni að draga 5 frá 12, með því að taka eitt 10000 til láns, en skrifa það *negatift* til að taka hið ofaukna burt aptur, þar

$$10000 \text{ lánað } - 10000 = 0$$

verður þá summan

$$\bar{1}7239 = -\ 2761.$$

Margföldun, *Multiplicatio.*

45. Orðþýðingar. Sè í samlagningu allir samleggjendur jafnir sín á milli, og menn vita, hvað margir þeir eru, þá finna menn summuna með margföldun (*Multiplicatio*). Heitir það verk að margfalda (*multiplicare*). Summan heitir þá Framkvæmi (*Productum,* eða *Factum*). Einn af þeim jafnstóru samleggjöndum, eða þeirra semeiginlega stærð, heitir Margfaldandi (*Multiplicandus*), en tala eða sá kunnugi fjöldi samleggjandanna heitir Margfaldi (*Multiplicator*). Bæði margfaldi og margfaldandi heita sameiginlega Gjörendur (*Factores*) t. d. $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Hèr er 5 *multiplicandus*, 4 er *multiplicator* og 20 *Productum*. þetta kunngjörist þannig $4 \times 5 = 20$ eða $4 . 5 = 20$. þetta má lesa þannig: 4 sinnum 5 er 20. Í bókstöfum er $a \times b = a . b = ab$, samber (21). $\times$ eða . kallast margföldunarmerki.

1. Viðbót. Í margföldun er heildin skoðuð í jöfnum deildum. Heildin er framkvæmi, en deildin margfaldandi, og deildanna tala margfaldi.

2. Viðbót. Með samlagningu finnast Framkvæmi eininga með einingum. þar af er margföldunartaflan (*Tabula pythagorica*). Hún byrjar með $2 . 2 = 4$, og endar með $9 . 9 = 81$. Svo tekur við stærri margföldunartaflan $2 . 11 = 22$ og nær til $9 . 19 = 171$. þessar töflur læra menn utanbókar.

46. Margfaldi og margfaldandi geta skipzt um, eða röð gjöranda má vera eptir geðþekkni, t. d. 3svar 5 er sama sem 5sinnum 3. því þar röð samleggjanda má vera eptir geðþekkni (18), eða má taka samleggjendur hverja fyrr og hverja síðar eins og vill, þá má rita þetta dæmi svo:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}\right\}}_{= 5 \times 3 \text{ ɔ: 5sinnum 3.}} = 3 . 5 \text{ ɔ: 3svar 5}$$

Sè hèr flatraðirnar samanlagðar, þá er summan 3svar 5 eða $3 . 5 = 15$; sè standraðirnar samanlagðar, þá er 5sinnum 3 eða $5 . 3 = 15$. Nú er heildin hin sama, þess vegna: 3sinnum 5 = 5sinnum 3, eða $3 \times 5 = 5 \times 3$.

Viðbót. þegar notað er margföldunarmerkið, gildir þá einu,

hvort margfaldinn er ritaður hægra megin eða vinstra megin þess, Hingað til hefir hann hèr verið settur vinstra megin.

Almenn sönnun:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 \ldots\ldots b \textit{ Addendi} \\ 1 + 1 + 1 \ldots\ldots b \textit{ Addendi} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdots \\ \qquad a \textit{ Addendi} \end{array}\right\} = a \,.\, b \; (= ab) \text{ ɔ: } a\text{sinnum } b}_{}$$

$b \,.\, a$ $(= ba)$ ɔ: $b$sinnum a.

Sè eins og fyrri flatraðirnar samanlagðar, þá er summan $a$sinnum b; sè standraðirnar samanlagðar, er summan $b$sinnum a. Þess vegna er $a$sinnum b sama sem $b$sinnum a.

47. Þegar margfaldinn er kunngjört framkvæmi, verður fyrst að margfalda með þeim eina gjöranda þess, og síðan það sem út kemur með hinum öðrum. Ellegar margfalda saman fyrst báða gjörendur margfaldans og með því framkvæmi aptur margfaldanda t. d.:

$$(3 \,.\, 5) \text{ sinnum } 4 = 3 \text{ sinnum } (5 \,.\, 4),$$

því (3 . 5) . 4 þýðir að 4 skuli setjast 3svar 5 sinnum sem *Addendus*, það er:

$$(3\text{svar } 5)\text{sinnum } 4 = \left\{\begin{array}{l} 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \quad \text{eptir } (45) \\ 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \end{array}\right.$$

það er í flatröðunum sama sem:

5 sinnum 4 + 5 sinnum 4 + 5 sinnum 4
eða þrítekið 5 sinnum 4.

En ef standraðirnar eru samanlagðar, þá er það (3svar 4) fimmtekið, eða 5 sinnum (3svar 4). Þess vegna: þrítekið (5 sinnum 4) er sama sem 5tekið (þrisvar 4). Þar af leiðir, að fyrst verður að margfalda (hèr 4) með þeim eina gjöranda margfaldans 3, og svo það útkomanda með hinum 5; ellegar fyrst með 5, svo það sem út kemur með 3.

Viðbót. Gjörendur mega umskiptast, hvað margir sem eru, t. d.

$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 3 \,.\, (4 \,.\, 5) = 3 \,.\, (5 \,.\, 4) = 3 \,.\, 5 \,.\, 4 = (3 \,.\, 5) \,.\, 4 = (5 \,.\, 3) \,.\, 4 = 5 \,.\, 3 \,.\, 4.$$

Yfir höfuð,

$a \,.\, b \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c) = a \,.\, (c \,.\, b) = a \,.\, c \,.\, b$
$= (a \,.\, c) \,.\, b = (c \,.\, a) \,.\, b = c \,.\, a \,.\, b.$

48. Verkefni. Að margfalda tölu með 1, 10, 100, 1000, eða yfir höfuð með einingu hverrar stèttar sem er.

Úrlausn. Rita svo mörg núll aptan við margfaldanda, sem þau eru mörg aptan við margfalda, t. d. $432 \times 100 = 43200$. Að þetta sè margföldun með 100, leiðir af því, að hver eining í 432 verður við þetta tveim stèttum hærri en áður, og þess vegna hundraðföld við það sem hún áður var. Af 432 verða þá 432 hundruð, það er: fjörutíu og þrjú þúsund og tvö hundruð (3).

49. Verkefni. Að margfalda tölu með einum tölustaf.

Úrlausn. Hagkvæmast er að byrja hægra megin og marfalda staf eptir staf, og skrifa í *Productið* framkvæmi þeirra hvert fyrir sig. En verði af einhverjum staf framkvæmið tveir tölustafir, þá skrifast ekki nema sá, sem stendur hægra megin, en hinn geymist í huganum (*in mente*) og legst við framkvæmi næsta stafs, sem á eptir kemur. t. d. skuli margfalda 648083 með 7, þá gjöra menn það svo:

$$\begin{array}{r} 648083 \\ 7 \\ \hline 4536581 \end{array} \qquad \text{má og setja svo:} \quad \begin{array}{r} 648083 \;(7 \\ \hline 4536581 \end{array}$$

Hèr kveð svo að orði: 7 sinnum 3 er 21, skrifa einungis 1 undir, en geym 2; 7 sinnum 8 er 56 og 2 geymdir er 58, skrifa 8, geym 5; 7 sinnum 0 er 0 og 5 geymdir er 5; 7 sinnum 8 er 56, skrifa 6, geym 5; 7 sinnum 4 er 28, og 5 geymdir er 33, skrifa 3 og geym 3; 7 sinnum 6 er 42, og 3 geymdir er 45, skrifa nú 45, þar ekkert kemur á eptir.

Sönnun. Eptir (45) er margföldun ei annað en samlagning jafnstórra samleggjanda, svo margra sem *multiplicator* tiltekur. Hèr var *multiplicator* 7, þess vegna skrifa eg *multiplicandus* 7 sinnum, og legg saman þannig:

$$\begin{array}{rcl}
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
648083 &=& 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3 \\
\hline
4536581 &=& 4200000 + 280000 + 56000 + 560 + 21
\end{array}$$

þessa sönnun má og gjöra meir alment gildandi með því að taka *polynomium,* sem gildir fyrir öll tölukerfi (9)

$$kU^{\mu} \cdots\cdots\cdots eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a,$$

og margfalda það með einhverri tölu, t. a. m. með 6, þá verður að margfalda hvern einasta lið með 6, þá verður

$$6\ (kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a)$$
$$= 6kU^{\mu} \cdots\cdots + 6eU^4 + 6dU^3 + 6cU^2 + 6bU + 6a,$$

er sjá má, ef tekin er summan af 6 slíkum jafnstórum *addendis* eptir (45) þannig:

$$\begin{array}{l}
kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a \\
kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a \\
kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a \\
kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a \\
kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a \\
kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a
\end{array}$$

þetta samanlagt eptir (22) eða (40) verður

$$6kU^{\mu} \cdots\cdots + 6eU^4 + 6dU^3 + 6cU^2 + 6bU + 6a.$$

Eins er það, hvað margir sem *addendi* eru; þess vegna ef *multiplicator* er $= n$, þá verður framkvæmið svo:

$$n(kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a) =$$
$$nkU^{\mu} \cdots\cdots + neU^4 + ndU^3 + ncU^2 + nbU + na.$$

þegar kunnug er umferðin í tölukerfinu, má snúa lægri eingastèttum í hærri, hvenær sem hinar lægri verða svo margar, að þær fylli eina hærri.

Skýring, þegar *Polynomium* eða fleiri bókstafir eru innilokaðir í sviga eða *Parenthesin,* þá merkir það, að öll sú *parenthesis* með sínu efni eigi að skoðast sem ein stærð eða tala væri. Hèr merkir því

$$6\,(kU^{\mu} \cdots\cdots + eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a)$$

að fyrst eigi að leggja saman

$$kU^{\mu}, \cdots eU^4, \quad dU^3, \quad cU^2, \; bU, \quad a$$

og margfalda síðan með 6.

50. Lærdómsgrein. Kunngjörð summa margfaldast með tölu, þegar sèrhver hennar samleggjandi margfaldast með tölunni; eða *polynomium* margfaldast með tölu, þegar sèrhver þess liður margfaldast með tölunni.

Sönnun: Þar samleggjendur mega takast í röð eptir geðþekkni í samlagningu (18), en margföldun er ekki annað en samlagning jafnstórra samleggjanda, hverra tala er *multiplicator*, en stærð *multiplicandus* (45), þá kemur fyrir eitt, hvort menn í samlagningu yfirfara liðina í *polynomio* eins og þeir standa raðaðir í því, og síðan taka hið annað og fara eins með það, og svo hvert eptir annað, og láta summuna alt af safnast, þangað til allir liðirnir eru samanlagðir, ellegar menn taka t. a. m. fyrsta liðinn í öllum þeim *polynomiis* og leggja þá saman, og síðan hinn annan liðinn í þeim öllum, og leggja við þá komnu summu o. s. frv., unz allir samsvarandi liðir eru samanlagðir.

Þessi lærdómsgrein framsezt þannig í bókstöfum:

$$n(a + b + c + \cdots) = na + nb + nc + \cdots$$

Sönnun með bókstöfum. $a + b + c + \cdots$ er *multiplicandus* og n *multiplicator*. Þá er

$$\begin{array}{l} a + b + c + \cdots \\ a + b + c + \cdots \\ a + b + c + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n \text{ Addendi} \\ \hline \end{array}$$

Summa $na + nb + nc + \cdots$

Sama kæmi fram, þó lagt væri saman þannig:

$a + b + c \cdots a + b + c \cdots a + b + c \cdots\cdots\cdots$ n *Addendi*.

Þess vegna *productið* rètt.

51. Lærdómsgrein. Tala margfaldast með kunngjörðri summu eða *polynomio*, ef talan margfaldast með sèrhverjum lið þess, og þau framkvæmi (*Partialproductin*), sem þá fram koma, leggjast saman.

Sönnun. Þar sú gefna tala er hèr *multiplicandus,* þá á hún að setjast svo opt sem *addendus,* sem *multiplicator* tiltekur, en partar *multiplicators* eru hans greindu liðir. Sè þá liðirnir samanlagðir, kemur hans heild: og má þá margfalda með henni *multiplicandus,* ef vill. En þar röð samleggjanda má vera eptir geðþekkni, má einnig taka þá greindu liði *multiplicators,* margfalda *multiplicandus* með hverjum þeirra. Með þessu móti koma þá fram þau *partialproduct,* er öll til samans fylla aðalframkvæmið (*Totalproductið*). *Multiplicandus* margtekst þá eins opt, og hann hefði verið margfaldaður með öllum *multiplicator* í einu lagi.

Sanna má þetta með öðru móti: Þar margfaldi og margfaldandi mega skiptast um (46), þá má eptir (50) margfalda alla liði *multiplicators* með *multiplicandus,* og verður það þá hið sama sem að margfalda *multiplicandus* með öllum liðum *multiplicators.*

Með bókstöfum kunngjörist þetta þannig:

$$(a + b + c \cdots) \, n = (an + bn + cn \cdots).$$

52. Verkefni. Að margfalda tölu ritaða eptir *dekadik* með annari tölu ritaðri eptir *dekadik.*

Úrlausn. Margfalda margfaldanda með einingastaf margfalda eptir (49), svo með tugastaf margfaldans; rita þetta tugastafsframkvæmi undir einingastafsframkvæmið þannig, að einingastafur tugastafsframkvæmisins standi undir tugastaf einingastafsframkvæmisins, eða svo, að eins stafs rúm verði autt hægra megin. Með sama hætti margfalda með hundraðastaf margfaldans, og rita svo, að tvö sæti verði auð fyrir aptan, svo með þúsundastaf, o. s. frv., að þrjú o. s. frv. sæti verði auð hægra megin, og yfir höfuð skulu við hvern staf margfaldans eins mörg sæti í framkvæminu auð látast hægra megin sem einingastètt sú, sem margfaldað er með, hefir mörg núll eða stafi aptan við sig. Loksins skal leggja saman öll *partialproduct,* eins og þau með þessum hætti standa af sèr.

t. d.

$$\begin{array}{rcl} 589074 & = & N \\ 90067 & = & P \\ \hline 4123518 & = & 7\,N \\ 3534444. & = & 60\,N \\ 5301666.... & = & 90000\,N \\ \hline 53056127958 & = & 90067\,N = PN. \end{array}$$

Partialproductið 3534444 telur hèr ekki einingar fyrstu stèttar, heldur annarar stèttar eða tugi, eins og þar stæði 35344440. Eins er 5301666 sama sem 53016660000. Punktarnir, sem í dæminu standa, þýða 0, til að spara manni ómak að skrifa 0 í auðu sætin. Að 60 sinnum 589074 sè = 35344440, leiðir af því að 60 = 10 . 6 og 10 . 589074 = 5890740 eptir (48) og 6 sinnum, það er 35344440 eptir (49). Líkt er með seinasta *partialproductið*, sem er 53016660000. Loksins eru *partialproductin* samanlögð eptir (20) og (51), því 589074 $\times$ 90067 = 589074 $\times$ (90000 + 60 + 7).

53. Verkefni. Að margfalda saman ótilteknar tölur eða bókstafastærðir.

Úrlausn. 1. *Monomia*. Lík merki margfölduð saman gefa +, ólík merki gefa —. *Coefficient* margfaldanda og margfaldans margfaldast saman; fæst þá *Coefficient productsins*. Bóksfafirnir skrifast hver við hliðina á öðrum úr margfalda og margfaldanda hver með sínum *exponent*. Sè það sami bókstafur sem er í margfalda og margfaldanda, þá styttist skriptin með því að rita stafina einu sinni með summu *exponenta* hans í vísis stað.

Dæmi og sönnun

$$+ 3a \times 4b = 12ab$$

$$\text{eða } + 3a \times + 4b = + 12ab.$$

Hèr er merkið + bæði í margfalda og margfaldanda, það kallast lík merki (og eins, þó það væri í báðum gjöröndum —). *Productið* verður þá hèr *positift*, því sá *positifi multiplicandus* er hèr settur (ekki burttekinn) svo opt margtekinn *addendus*, sem sá *positifi multiplicator* hefir margar einingar. Sè nú t. a. m. $3a$ eða $+ 3a$ *multiplicandus*, þa ætti, ef viðhöfð væri samlagning, að skrifa $+ 3a$ svo opt sem $+ 4b$ hefir margar einingar, og leggja svo saman. Þá sjá allir, að summan þar af yrði *positif* af þeim *positifu addendis*. Þess vegna á *productið* að vera *positift*, eða hafa sama merki sem allir *addendi* hafa, eða sem *multiplicandus* hefir. Setjum vèr nú að væri

$$- 3a \times + 4b = - 12ab.$$

Hèr eru merkin ólík, eða annað merki í þeim eina *factor* en í hinum; þá verður *productið negatift;* því ef skrifa ætti $- 3a$ svo opt sem einingar eru í $+ 4b$ og leggja saman, þá fengi summan — eða yrði *negatif* af þeim *negatifu addendis*. Í báð-

um þessum tilfellum fær *productið* sama merki sem *multiplicandus*. En setjum nú að væri

$$+ 3a \times - 4b = - 12ab.$$

Sá *negatifi multiplicator* $- 4b$ þýðir, að sá *positifi multiplicandus* $+ 3a$ eigi að burtnemast (ekki nú setjast), svo opt sem *multiplicator* $4b$ hefir í sèr einingar. Eptir samlagningarreglum á því að skrifa $+ 3a$ svo opt sem einingarnar eru í $4b$, en þar $-$ stendur við $4b$, þá breytast öll merkin við $+ 3a$ í hið gagnstæða eptir (41), svo $3a$ álízt allsstaðar sem *subtrahendus* og á að burtnemast. En summan af svo mörgum $- 3a$, sem $4b$ ákvarðar, verður *negatif* (37), því þessir *addendi* horfa allir öfugt við það sem þeir horfðu í fyrstu; og þess vegna fær nú *productið* gagnstætt horf við *multiplicandus*, eða verður $= - 12ab$. Sektjum nú loksins að væri

$$- 3a \times - 4b = + 12ab.$$

Hèr fær framkvæmið gagnstætt horf við *multiplicandus*, af því *multiplicator* $- 4b$ er *negatif* eins og í 3. tilfelli. Ætti hèr að nota samlagningu, þá yrði að skrifa $- 3a$ svo opt sem $4b$ hefir margar einingar, en af því $-$ stendur við $4b$, yrði að breyta öllum $-$ merkjunum við $3a$ í $+$, og skoða öll þessi $- 3a$ sem *subtrahenda* og burtnema þá (41), yrði svo summan $+ 12ab$. Hèr eru þá upptalin 4 tilfelli, sem hèr geta verið. Hið fyrsta og fjórða sýna, að lík merki gefa $+$, en hið annað og þriðja, að ólík merki gefa $-$.

Reglan um *coefficientana* og bókstafina sannast af (47) og (21), því þegar t. a. m. margfalda skal

$$3a \times 4b,$$

þá er $4b$ kunngjört framkvæmi, má því fyrst margfalda með 4 eptir (47), þá er

$$3a \times 4 = 12a,$$

því $3a + 3a + 3a + 3a = 12a$ eptir (21); þar með er þá sönnuð reglan um *coefficientana*. Má og líka segja 4 sinnum 3 er 12, en einingarnar, sem taldar eru í 3, eru a. Þess vegna alls $12a$. Síðan margfaldast þetta framkvæmi $12a$ með hinum öðrum *factor* b eptir (47), kemur þá $12ab$, og þar af leiðir reglnuna um bókstafina.

Af (47, 1) leiðir, að þar gjörendur mega alla vega umskiptast, má margfalda saman tölurnar fyrst, og síðan bókstafina.

Reglan um *exponentana* sannast þannig:

$$m^3\, n \times m^4\, n^3.$$

þetta er sama sem

$$mmmn \times mmmmnnn, \text{ samber (21).}$$

Væri nú allir *factorarnir* skrifaðir, m sèrílagi og n sèrílagi, þá yrði framkvæmið

$$= mmmmmmmnnnn$$

og þá er skemra að skrifa

$$m^7\, n^4.$$

Af þessu er reglan sönnuð: að leggja saman *exponenta* hvers stafs sèrílagi.

1. Skýring. Í (21) er svo að orði kveðið: Bókstafur með vísi kallast veldi (*potestas*), En nú þegar kunnugt er orðið af (45), hvað *product* þýðir, má þýða Veldi þannig: að það sè *product* af jafnstórum töldum *factorum*, eða framkvæmi taldra jafnstórra gjöranda, en tala þessara jafnstóru gjöranda heitir Vísir, eða Veldisvísir (*exponens potestatis*). þannig var í dæminu hèr á undan

$$m^7 = mmmmmmm.$$

Hèr eru nefnilega 7 jafnstórir gjörendur, sem allir eru $= m$, hver fyrir sig.

2. Skýring. Í þessum tölulið er svo að orði kveðið, að hinn *positifi multiplicator* setji, en hinn *negatifi multiplicator* burtnemi *multiplicandus*. Til að skýra þetta betur, vil eg taka *multiplicatorana*

$$+ 3, + 2, + 1, 0, - 1, - 2, - 3$$

og margfalda með þeim *multiplicandus* a, þá er

$$\begin{array}{l}
a \times + 3 = + 3a = a + a + a \\
a \times + 2 = + 2a = a + a \\
a \times + 1 = + 1a = a \\
a \times 0 = 0a = 0 \\
a \times - 1 = - 1a = - a \\
a \times - 2 = - 2a = - a - a \\
a \times - 3 = - 3a = - a - a - a.
\end{array}$$

þar *multiplication* er samlagning jafnstórra taldra samleggjanda (45), en *multiplicator* er fjöldi hinna jafnstóru samleggjanda (sjá sama tölulið 45), þá er

$$a \times 3 = a + a + a, \text{ og } a \times - 3 = - a - a - a.$$

Eins og hinn *positifi multiplicator* setur *multiplicandus* svo opt sem einingin er opt innifalin í sjálfum honum (*multiplicator*) og gjörir úr *multiplicandus* eins margtekinn *addendus* sem einingar eru margar í *multiplicator*, svo burtnemur hinn *negatifi multiplicator multiplicandann* svo opt sem einingin er innifalin í *multiplicator*, og gjörir úr *multiplicandus* eins margtekinn *subtrahendus* sem einingar eru í *multiplicator*. þess vegna verður $a \times - 3$ sama sem $- a - a - a$. Eins gjörir *negatif multiplicator* úr *negatif multiplicandus* eins margtekinn *subtrahendus* með því að snúa *minusunum* í *plusa* (41).

Til að sýna þessa snúninga, vil eg nú margfalda $- a$ með *multiplicatorunum*

$$+ 3, + 2, + 1, 0, - 1, - 2, - 3$$

þannig:

$$- a \times + 3 = - 3a = - a - a - a$$
$$- a \times + 2 = - 2a = - a - a$$
$$- a \times + 1 = - 1a = - a$$
$$- a \times 0 = 0a = 0$$
$$- a \times - 1 = + 1a = + a$$
$$- a \times - 2 = + 2a = + a + a$$
$$- a \times - 3 = + 3a = + a + a + a$$

Af þessum samburðum má nú sjá snúningana og burtnumningarnar, sem hinn *negatifi multiplicator* gjörir, og hvernig alt gengur til. *Multiplicator* 0 burtnemur *muliplicandus* líka, en sá er munurinn á þeim burtnumningum, að *multiplicator* 0 burtnemur og setur ekkert í staðinn, en hinn *negatifi* burtnemur fyrst og setur svo hið gagnstæða í staðinn. Aðgæti menn það, að *multiplicationin* er eins og fjöldi *additiona* ellegar *subtractiona*, taki svo *positif multiplicator* og *subtraheri* frá honum 1 aptur og aptur, þá sèst, að hann gengur í gegnum 0 og síðan til hinna *negatifu* stærðanna, og í því hann gjörir þetta, þá snúast framkvæmin til hinna gagnstæðu stærðanna við þær, sem þau höfðu áður. Í fyrra samburðinum snèrist framkvæmið $+ 3a = a + a + a$ í hið gagnstæða $- 3a = - a - a - a$, en í hinum síðara snèrist framkvæmið $- 3a = - a - a - a$ í hið gagnstæða $+ 3a = + a + a + a$, en þegar *multiplicatorinn* gekk í gegnum 0, gekk einnig framkvæmið í gegnum 0.

2. *Polynomia.* Sè sá eini *factor polynomium*, þá margfaldast eptir (50) eða (51), en sè báðir gjörendur *polynomium*, þá margfaldast allur *multiplicandus* með sèrhverjum lið í *multiplicator* og *partialproductin* leggjast saman.

Sannast af (50) og (51).

54. Dæmi upp á margfaldanir bókstafastærða.

$$\begin{array}{lllll} & a & + & b & \\ & a & + & b & \\ \hline & a^2 & + & ab & \\ & & & ab & + b^2 \\ \hline A. & a^2 & + & 2ab & + b^2 \end{array}$$

Í bókstafareikningi þarf ekki að byrja margföldun nè samlagningu hægra megin, því þar er ekkert að geyma (eða hafa *in mente*) eins og í talnareikningi (49). Hèr má því byrja með því að segja: a sinnum a er a^2, og a sinnum b er ab, þá er fengið fyrra *partialproductið* $a^2 + ab$, því næst er margfaldað með b, og sagt: b sinnum a er ab (bezt er að rita bókstafina í stafrofsröð) og b sinnum b er b^2; þá er komið síðara *partialproductið* $ab + b^2$; og svo er lagt saman. Þessi margföldun táknast þannig: $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ ellegar, þar báðir gjörendur eru jafnir, svo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, samber (21). Sè þetta enn margfaldað með $a + b$, þá er það svo:

$$\begin{array}{lllll} a^2 + 2ab + b^2 & & & & \\ a + b & & & & \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 & & & & \\ \quad\;\; a^2b + 2ab^2 + b^3 & & & & \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \cdots\cdots B. & & & & \end{array}$$

Hèr með finst, að $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Nú viljum vèr finna $(a - b)^2$ og $(a + b)(a - b)$

$$\begin{array}{llll} a & - & b & \\ a & - & b & \\ \hline a^2 & - & ab & \\ & - & ab & + b^2 \\ \hline a^2 & - & 2ab & + b^2 = (a - b)^2 \cdots\cdots C \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a & + & b & \\ a & - & b & \\ \hline a^2 & + & ab & \\ & - & ab & - b^2 \\ \hline a^2 & & 0 & - b^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \cdots\cdots D. \end{array}$$

þessi ofanskrifuðu *product* eru þess verð, að menn muni þau utanbókar, því opt þarf að nota þau í bókstafareikningi, svo sem til að leysa upp bókstafastærðir í *factores*, o. s. frv. **Þannig** má lesa:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Kvaðrat binomii, eða *binomium* margfaldað með sjálfu sèr, er jafnt *kvaðrati* hins fyrra liðar (a^2) tvöföldu *producti* beggja liðanna ($2ab$) og *kvaðrati* hins síðara liðar (b^2). Eins má lesa *kvaðratið*, þó *binomium* sè $a - b$, eða mismunur tveggja stærða; þar hafa liðirnir ólík merki, verður svo miðliðurinn *negatif*, en *kvaðrötin* bæði *positif*, þannig: $a^2 - 2ab + b^2$ eins og áður er fundið. Menn geta nefnilega skoðað $(a - b)^2$ eins og það væri $[a + (-b)]^2$, þá er *kvaðrat* fyrra liðar $= a^2$; hið 2falda *product* beggja liðanna $= 2a\,(-b) = -2ab$, og *kvaðrat* síðara liðar $= (-b)(-b) = + b^2 = b^2$, verður þá tilsamans $a^2 - 2ab + b^2$.

Margföldunin $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ má lesast þannig: Summa tveggja stærða margfölduð með sömu stærða mismun er jöfn mismun sömu stærða *kvaðrata*.

Dæmi í tölum getur verið:

$$(5 + 2)(5 - 2) = 5^2 - 2^2 = 7\,.\,3 = 21$$
$$\text{eða}\quad 7 \times 3 = 25 - 4 = 21.$$

Aptur á mót má eptir sömu reglu ætíð uppleysa kunngjörðan mismun tveggja *kvaðrata* í tvo kunngjörða *factora*, með því að mynda þann eina *factorinn* af summu, en hinn annan af mismun *kvaðrat*rótanna ɔ: talnanna, sem *kvaðrötin* eru tekin af t. a. m.

$$12^2 - 9^2 = (12 + 9)(12 - 9) =$$
$$144 - 81 = 21 \times 3 = 63$$

Með líkum hætti getur sá, sem kann utan að þau tilheyrandi *product* í bókstöfum, ætíð uppleyst í *factora*.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$ ········ eptir A
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$ ········ eptir C
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)(a + b)(a+b)$ ···· eptir B
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)(a - b)(a-b)$ ··· eptir B

Trinomia margfölduð saman

$$\begin{array}{llllll} 5a^4 & -\ 2a^3b & +\ 4a^2b^2 & & & \textit{multiplicandus} \\ a^3 & +\ 4a^2b & -\ 2b^3 & & & \textit{multiplicator} \\ \hline 5a^7 & -\ 2a^6b & +\ 4a^5b^2 & & & \\ & 20a^6b & -\ 8a^5b^2 & +\ 16a^4b^3 & & \\ & & -\ 10a^4b^3 & +\ 4a^3b^4 & -\ 8a^2b^5 & \\ \hline 5a^7 & +\ 18a^6b & -\ 4a^5b^2 & +\ 6a^4b^3 & +\ 4a^3b^4 & -\ 8a^2b^5 \end{array}$$

Í þriðja *partialproductinu* (sèrframkvæminu) mátti ekki leggja $-\ 10a^4b^3$ saman við stærðirnar þar fyrir ofan, sem telja a^5b^2, þar þær ekki eru samkynja; heldur átti $-\ 10a^4b^3$ í þriðja sèrframkvæminu, saman við $+\ 16a^4b^3$ í öðru sèrframkvæminu og er því lagt samanvið það. $+\ 4a^3b^4$ og $-\ 8a^2b^5$ er ekki samkynja neinu, og skrifast út af fyrir sig. Það er einnig athugavert, að summa *exponenta* stafanna er í hverjum lið í öllum *multiplicandus* $=$ 4, og í *multiplicator*sliðunum $=$ 3. Þá kallast *multiplicandus homogen* (samkynja) sjálfum sèr, og eins *multiplicator* samkynja sèr eptir eðli sínu. Þá verður einnig framkvæmið samkynja sèr; þar er summa vísanna í hverjum lið $=$ 7. Þessi regla er optast nær gildandi í mælifræðinni, þó að einnig beri við, að menn víki frá henni.

Dæmi með ótilteknum vísum.

$$\begin{array}{l} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} \cdots\cdot + a^{n-2}x + a^{n-1} \\ x \quad - a \\ \hline x^n \quad + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + a^3x^{n-3} \cdots\cdot + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x \\ \quad\quad - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} \cdots\cdot - a^{n-2}x^2 - a^{n-1}x - a^n \\ \hline x^n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad - a^n \quad E. \end{array}$$

Hèr er framkvæmið einungis $= x^n - a^n$, því allir liðir þar á milli eru uppgengnir. Þessi margföldun er lærdómsrík og verð að muna, því hún yfirgrípur óteljandi tilfelli, af því *exponentarnir* eru ótilteknir en fylgja þó vissri reglu eða lögmáli. Lærdómur sá, sem hèr í liggur, kemur opt til nota í *mathematik. Multiplicandus* er nokkurskonar Series (Talnaröð) með niðurstígandi veldum að því er x áhrærir, en uppstígandi að því, er áhrærir a. Það má einnig hafa endaskipti á *multiplicandus;* þá verða veldin uppstígandi við x, en niðurstígandi við a. Þar sem hèr

standa punktaraðir, þar á að fylla með liðum eptir líku formi, sem hinir liðirnir hafa, en þeir vísar, sem vanta, verða kunnugir, þegar hinir vísarnir eru gefnir í tölum.

Væri nú í þessu dæmi $n = 7$, þá væri framkvæmið $x^7 - a^7$, margfaldinn væri eins og áður $x - a$, en margfaldandi yrði þá

$$x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6.$$

Hèr er í hverjum lið summa vísanna $= 6$, en í bókstöfunum var hún $= n - 1$. Setjum vèr nú $a = 1$, þá fær sú *Series* þessa ásýnd:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

og sýnist þá ekki vera *homogen*, en er það samt, því öll veldi af 1 eru $= 1$. Alt eins má láta a vera *negatifa* stærð t. d. $- 1$, þá fær *Series* þessa mynd.

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

vegna þess að lík merki margfölduð saman gefa $+$, en ólík $-$. Þá verður nefnilega ef $a = - 1$, hið annað veldi $a^2 = - 1 \times - 1 = + 1$, og þriðja veldi $a^3 = - 1 \times - 1 \times - 1 = - 1$ eða þar $- 1 \times - 1 = + 1$, þá $- 1 \times - 1 \times - 1 = + 1 \times - 1 = - 1$.

Setjum vèr í aðaldæminu E, $n = 2$ og $a = - \alpha$, svo það verði neitandi stærð, þá verður í margfaldanda $x^{n-1} + ax^{n-2} = x - \alpha x^0$; fleiri liði má þar ekki taka, því *series* endar á liðnum a^{n-1}, sem hèr er a eða $- \alpha$ með engum *xfactor,* sem er hið sama em x^0, sem er $= 1$, því $1\ x = x$, $x\ x = x^2$, o. s. frv., því eins og gjörendur fjölga með því að setja þá, svo fækka þeir með því að taka þá burtu (sem ljósara verður síðar). Margfaldinn $x - a$ verður nú $x - (- \alpha) = x + \alpha$, (36 K). Framkvæmið $x^n - a^n$ verður $x^2 - (- \alpha . - \alpha) = x^2 - (+ \alpha^2) = x^2 - \alpha^2$. Þannig er þá framkomin margföldunin $(x - \alpha)(x + \alpha) = x^2 - \alpha^2$ eða *product* summu og mismunar sömu talna er jafnt mismun sömu talna *kvaðrata,* eins og áður er fundið, þar sem í dæmi stóð: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Þessi *formula* getur lètt reikning í tölum, t. a. m. þar eru tveir vellir rètt ferhyrndir; sá eini 114 faðmar á hvern veg, en hinn 109 faðmar á hvern veg. Hversu stór er mismunur þeirra að fermáli? Þá segir í *geometríu,* að hann sè $114^2 - 109^2$, en eptir umtalaðri *formulu* er þetta sama sem

$$(114 + 109)(114 - 109) = 223 . 5 = 1115 \text{ ferfaðmar.}$$

þannig sèst, að ótiltekinna stærða margföldun getur hjálpað til að finna alment gildandi setningar, einnig til að uppleysa bókstafastærðir í gjörendur, sem opt er mikilsvert t. a. m.:

$$16x^2 + 8xg + g^2 = (4x + 9)(4x+9) = (4x + 9)^2 \text{ eptir } A$$
$$x^2 - 6xg + 9g^2 = (x - 39)^2 \text{ eptir } C$$
$$25f^2g^2 - 9r^2n^2 = (5fg + 3rn)(5fg - 3rn) \text{ eptir } D$$
$$(x + g)^2 - (x-g)^2 = [(x+g) + (x-g)][(x+g) - (x-g)]$$
$$= 2x \, . \, 2g = 4xg \text{ eptir } D.$$

Hèr í liggur sá lærdómur: Hvenær sem menn hafa hið 4falda framkvæmi tveggja stærða, þá má snúa því í mismun tveggja *kvaðrata*, t. d.

$4 \, . \, 5 \, . \, 3 = 4xg$, þá er $5 + 3 = 8$, $5 - 3 = 2$, þá og $8^2 - 2^2 = 64 - 4$.

Setji menn nú *kvaðröt* fyrir x og g, og gjöri $x = m^2$ og $g = n^2$, þá verður seinasta *formulan* þannig:

$$(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2$$

hèr af leiðir:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2$$

Setji menn síðan $m^2 + n^2 = c$, $2mn = a$, og $m^2 - n^2 = b$, þá verður

$$c^2 = a^2 + b^2$$

og kemur það til gagns í *geometríu* til að finna alla svo nefnda sammælilega rètthyrnda þríhyrninga (*triangula rectangula rationalia*) með því að setja hverjar tölur sem vill fyrir m og n, og reikna svo þar út af a, b, c, en m þarf að vera stærra en n. Þá verða a, b, c hliðarnar þríhyrningsins, en c verður sú, sem liggur andspænis hinu rètta horni. Þá verður t. a. m.

ef m	og n	þá a	b	c
er 2	er 1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
5	2	20	21	29

55. Frumsagnir.

1. Jafnar stærðir margfaldaðar með jöfnum stærðum gefa jöfn framkvæmi:

$$\begin{array}{rcl} a & = & b \\ m & = & n \\ \hline am & = & bn \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 11 & = & 5 + 6 \\ 7 & = & 3 + 4 \\ \hline 77 & = & 15 + 18 + 20 + 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 12 & = & 5 + 7 \\ 8 & = & 10 - 2 \\ \hline 96 & = & 50 + 70 - 10 - 14 \\ & = & 120 - 24 = 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 15 & = & 14 + 1 \\ -6 & = & -4 - 2 \\ \hline -90 & = & -56 - 4 - 28 - 2 \end{array}$$

2. Ójafnar játandi stærðir margfaldaðar með jöfnum játandi stærðum gefa misstór framkvæmi; hið stærra framkvæmi verður þeim megin, sem meira var margfaldað:

$$\begin{array}{rcl} a & > & b \\ m & = & n \\ \hline am & > & bn \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 12 & > & 5 + 6 \\ 7 & = & 3 + 4 \\ \hline 84 & > & 15 + 18 + 20 + 24 \end{array}$$

3. Jafnar játandi stærðir margfaldaðar með misjöfnum játandi stærðum gefa misstór framkvæmi; hið stærra verður þeim megin sem með meira var margfaldað:

$$\begin{array}{rcl} a & = & b \\ m & > & n \\ \hline am & > & bn \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 12 & = & 7 + 5 \\ 8 & > & 7 \\ \hline 96 & > & 49 + 35. \end{array}$$

þessa reglu má ætíð nota. En að því er neitandi jafnar stærðir snertir, þá snýst $>$ í $<$, og $<$ í $>$, yfir höfuð: þetta merki snýst við

$$\begin{array}{rcl} -10 & = & -10 \\ 8 & > & 7 \\ \hline -80 & < & -70 \end{array}$$

þegar stærðirnar skoðast með merki sínu, þá er $-80 < -70$; en skoðist þær að burthugsuðu merkinu (*danice: med Abstraction af Tegnet*), þá er $80 > 70$ eptir höfuðreglunni. þess vegna ef menn vita, að jöfnu stærðirnar eru neitandi, þá snúa menn merkinu við; en viti menn það ekki, þá álíta menn þær sem $+$, og láta höfuðregluna gilda.

4. Jafnar játandi stærðir margfaldaðar með misjöfnum neitandi snúa ekki merkinu við, t. a. m.:

$$\begin{array}{rcr} 12 & = & 12 \\ -\ 5 & > & -\ 6 \\ \hline -\ 60 & > & -\ 72 \end{array}$$

Hèr er — 60 > — 72; þetta leiðir af reglunni 2 í þessari grein, með því að skipta um gjörendur.

5. Jafnar neitandi stærðir margfaldaðar með misjöfnum neitandi stærðum snúa merkinu við, svo sem:

$$\begin{array}{rcr} -\ 12 & = & -\ 12 \\ -\ 5 & > & -\ 6 \\ \hline 60 & < & 72 \end{array}$$

Hèr snýst merkið við, ekki fyrir þá skuld, að margfaldað er með misjöfnum neitandi stærðum, heldur vegna þess að þær margfölduðu stærðir eru neitandi. Þetta leiðir af 4. reglu með því að *abstrahera* (burthugsa) *minus*merkið frá 12; þá hefði komið — 60 og — 72 eins og dæmið þar sýnir. En eins og — 72 er lengra frá 0 heldur en — 60 er frá 0, þá verður eins, þegar — breytist í +, 72 lengra frá 0 heldur en 60 er frá 0, en stefnan verður hin gagnstæða, og þá verður það stærra, sem áður var minna. Játandi stærð er því meiri, sem hún er lengra frá 0, en neitandi stærð því minni, sem hún er lengra frá 0.

6. Jafnar neitandi stærðir margfaldaðar með misjöfnum játandi stærðum snúa einnig merkinu við

$$\begin{array}{rcr} -\ 12 & = & -\ 12 \\ 6 & > & 5 \\ \hline -\ 72 & < & -\ 60 \end{array}$$

7. Jafnar neitandi stærðir margfaldaðar með misjöfnum stærðum, ef ein þeirra er játandi, en hin neitandi, gjöra sama:

$$\begin{array}{rcr} -\ 12 & = & -\ 12 \\ 6 & > & -\ 5 \\ \hline -\ 72 & < & 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} -\ 12 & = & -\ 12 \\ -\ 5 & < & 6 \\ \hline 60 & > & -\ 72 \end{array}$$

þessir töluliðir 5, 6 og 7 geta innibundizt í einni setningu. nefnilega:

8. Jafnar neitandi stærðir margfaldaðar með misjöfnum, hvort sem þær eru játandi eða neitandi, eða sín með hverju merki, snúa meirleiksmerkinu við.

56. Verkefni. Að margfalda viðkendar og fleirkonar tölur með óviðkendri.

Úrlausn. Margfalda fyrst minsta kyn með óviðkendu tölunni. Verði framkvæmið svo stórt, að það fylli einingu, eina eða fleiri af næsthærra kyni, þá tak af framkvæminu svo margar einingar hærra kyns, sem verður, og skrifa afganginn í aðalframkvæmið, (eða undir minsta kyn í margfaldanda). Margfalda síðan næsthærra kyn í margfaldanda, og legg við það, sem út kemur, tölu hinna hærri eininga, sem fengust úr minna kyni. þannig skal áframhalda, hvað mörg sem kynin eru, að margfalda hvert kyn með margfaldanum, og leggja þar við einingar þær, sem fást úr hinu minna kyni.

þetta gjörist ljósara með dæmi. þar skyldi eiga að margfalda 45 rd. 4 ℳ 13 β með 7, þá gjörist það svo:

45 rd. 4 ℳ 13 β (7
320 rd. 3 ℳ 11 β

Hèr má svo að orði kveða: 7 sinnum 13 er 91, en 91 β er 5 ℳ (sem er 80 β) og 11 β, sem skrifast undir skildingana; en 5 ℳ geymist. þar næst 7 sinnum 4 ℳ er 28 mℳ og 5 geymd er 33 ℳ. þar af má taka 5 rd. sem er 30 ℳ, verða eptir 3 ℳ, sem skrifast undir mörkin; en 5 rd. geymast. Nú fer eg að margfalda ríkisdalina, og segi 7 sinnum 5 er 35 og 5 geymdir er 40 rd., skrifa einingastafinn 0 undir ríkisdalina; en geymi 4 tugi; 7 sinnum 4 er 28, og 4 geymdir er 32, sem skrifast fyrir framan 0; verður svo aðalframkvæmið 320 rd. 3 ℳ 11 β.

Sönnunin er hèr öldungis eins og í (49).

þegar framkvæmi hinna margfölduðu kynja er stórt, og þarf að vita, hvað margar einingar hærra kyns liggja þar í, þá þarf að hafa til þess deilingu, en hún verður síðar kend. þó mun það, sem hèr er sagt, verða skiljanlegt án þess búið sè að kenna hana. Annars geta menn í bráð notað margföldun og frádragningu, sem í rauninni er hið sama sem deilingin, þó talnabrögð

sjálfrar deilingarinnaa gjöri verkið hægra. það verk að snúa lægra kyni í hærra, einnig hærra kyni í lægra, kallast kynbreyting.

Dæmi upp á það, þegar margfaldinn er stór.

Margfalda 14 ℔ 16 lóð 3 kvintin með 486.

14 ℔ 16 lóð 3 kvintin (486
7058 ℔ 12 lóð 2 kvintin

Hèr má segja: 3svar 6 er 18, skrifa 8 annarsstaðar (í hjáritningu), geym 1; 3svar 8 er 24, og 1geymdur er 25, skrifa 5, en geym tvo; 3svar 4 er 12, og 2 geymdir er 14, skrifa 14; er þá komið í hjáritninguna 1458; þetta eru þau margfölduðu kvintin. Nú ganga 4 af þeim í 1 lóð, svo hèr má aftaka 364 lóð, því 4 sinnum 364 lóð eru1456 kvintin; ganga þá af 2kvintin, sem skrifast undir kvintinin í aðalframkvæmið. því næst margfalda eg næsta kyn 16 lóð með 486, eða 486 með 16 eptir stærri töflunni, og segi: 6 sinnum 16 er 96, skrifa í hjáritning 6, en geymi 9, 8 sinnum 16 er 128 og 9 geymdir er 137, skrifa 7 í hjáritning, en geymi 13; svo 4 sinnum 16 er 64 og 13 geymdir er 77; skrifa þá; er svo komið í hjáritninguna 7776, þar við leggjast hin geymdu lóð 364, verða 8140 lóð. Nú eru 32 lóð, sem gjöra 1 ℔, og má hèr aftaka 254 ℔, sem eru 8128 lóð, ganga þá af 12 lóð, en 254 ℔ geymast. þau 12 lóð skrifast í aðalframkvæmið. Loksins margfalda eg 14 ℔ með 486 eða 486 með 14, og segi: 6 sinnum 14 er 84, skrifa 4 í hjáritning, geymi 8; 8 sinnum 14 er 112, og 8 geymdir er 120, skrifa 0 í hjáritning, en geymi 12; 4 sinnum 14 er 56, og 12 geymdir er 68; þá er í hjáritninguna komið 6804; þar undir má skrifa 254 ℔ geymd og leggja við, koma 7058 ℔, sem skrifast í aðalframkvæmið, svo það verður 7058 ℔ 12 lóð 2 kvintin.

Hèr við má og hafa þá aðferð að dreifa margfaldanum, og má það ske með mörgu móti, svo sem:

$$486 = 6 + 480 = 6 + 48 . 10 = 6 + 6 . 8 . 10.$$

Hèr má nefnilega fyrst margfalda með einingastafnum 6, og skrifa framkvæmið þar af með öllum þess kynjum. Svo má nota þetta framkvæmi aptur, og margfalda það með 8, þá er fenginn sá 48faldi *multiplicandus*. Síðan margfaldast hann með 10, þá er fenginn sá 480faldi *multiplicandus*. Við hann er lagður hinn 6faldi *multiplicandus*, sem áður er fenginn, kemur þá hinn 486

faldi *multiplicandus*, er finnast átti. þessi margföldunaraðferð er þá svona á að sjá:

14 ℔	16 lóð	3 kvint.	(6	(486
87 ℔	4 lóð	2 kvint.	(8	6
~~697~~	~~4~~	»	(10	480
6971	8			
7058 ℔	12 lóð	2 kvint.		

Hèr margfaldast *multiplicandus* fyrst með 6 og fæst 87 ℔ 4 lóð 2 kvintin. þetta marfaldast nú með 8 og fæst 697 ℔ 4 lóð, en það strykast út, til minnis um, að það eigi ekki að leggjast saman við hin önnur framkvæmi. Nú margfaldast 697 ℔ 4 lóð með 10, kemur 6971 ℔ 8 lóð, sem er hinn 480faldi *multiplicandus;* og loksins er lagt saman hið 480falda og hið 6falda, en hlaupið yfir hið yfirstrykaða, sem var hið 48falda.

Fleiri eru aðferðir dreifingar; svo sem að leysa *multiplicator* upp í *factores,* en ekki *addendos,* eins og hèr var meðfram gjört. þegar þessi *multiplicator* skal leysast upp í gjörendur, þá er

$$486 = 2 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 3 = 9 \,.\, 9 \,.\, 6.$$

þetta síðara er hentugast, svo gjörendurnir verði sem fæstir, og undir eins verði hægt að margfalda með hverjum þeirra. Fyrst margfaldast 14 ℔ 18 lóð 3 kvintin með 9, svo það, sem þá fram kemur, með hinum öðrum 9, og seinast það, sem þá út kemur, með 6. Hèr er engin samlagning hinna sèrstöku framkvæma viðhöfð. Reikningurinn er þá svona á að líta:

14 ℔	16 lóð	3 kvint.	(9
130 ℔	22 lóð	3 kvint.	(9
1176 ℔	12 lóð	3 kvint.	(6
7058 ℔	12 lóð	2 kvint.	

Hafa má einnig við ásamt gjöröndunum hvort sem vill heldur samleggjendur eða frádraga; þá er t. a. m. $486 = 5 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 2 - 4$. Hafi maður þessa dreifingu, þá er reikningurinn svona á að líta:

14 ℔ 16 lóð 3 kvint. (5 (486 = 5 . 7 . 7 . 2 — 4
72 ℔ 19 lóð 3 kvint. (7
508 ℔ 10 lóð 1 kvint. (7
3558 ℔ 7 lóð 3 kvint. (2
7116 ℔ 15 lóð 2 kvint.
— 58 ℔ 3 lóð » = 4 (14 ℔ 16 lóð 3 kvint.)
7058 ℔ 12 lóð 2 kvintin.

Einkum eru *addendi* og *subtrahendi* handhægir, þegar þeir eru = 1, því þá þarf ekki að margfalda með þeim. Þá má og líka nota upp aptur margfaldanir, sem áður eru gjörðar. t. d. í sama dæmi:

$$486 = 485 + 1 = 5 . 97 + 1$$
$$= 5 . (32 . 3 + 1) + 1$$
$$= 5 . (4 . 8 . 3 + 1) + 1.$$

Hèr má fyrst 5falda *multiplicandus*, svo 4falda það, sem útkemur, þá 8falda og 3falda; því næst leggja þar við einfalt hið 5falda; þá er búið að fullnægja 5 . (4 . 8 . 3 + 1). Loksins leggur maður hið einfalda þar við. Reikningurinn verður þá svo:

14 ℔ 16 lóð 3 kvintin (5
72 ℔ 19 lóð 3 kvintin (4
290 ℔ 15 lóð » (8
2323 ℔ 24 lóð » (3
6971 ℔ 8 lóð »
72 19 3 = 5 (14 ℔ 16 lóð 3 kvint.)
7043 27 3
14 16 3 = 1 (14 ℔ 16 lóð 3 kvint.
7058 ℔ 12 lóð 2 kvintin.

Hèr mátti einnig gjöra báðar seinustu samlagningarnar í einu (sem ætíð er bezt að gjöra, þegar svo stendur á), þannig:

6971 ℔ 8 lóð
72 19 3 = 5 (14 ℔ 16 lóð 3 kvint.)
14 16 3 = 1 (14 ℔ 16 lóð 3 kvint.)
7058 ℔ 12 lóð 2 kvint.

Deiling (*Divisio*).

57. Orðþýðingar. Deiling er sú reikningsathöfn, hvar með rannsakað verður, hversu opt ein tala er innifalin í annari. Sú tala, sem þannig innifelst í annari, heitir deilir eða hluti (*Divisor*). Hin talan, sem innibindur hana, heitir deilandi (*Dividendus*). En sú tala, sem segir, hvað opt deilir er innifalinn í deilanda, heitir *kvoti* eða hlutatala (*Quotiens*). Stundum ber það til, að nokkuð er umfram, og heitir það afgangur eða leifar (*Residuum*). Þegar engar eru leifar, kallast að *Divisor* gangi upp í *Dividendus*, eða *Dividendus* sè *Multiplum Divisors*, en *Divisor* kallast þá Mælir (*Mensura*) eða *Submultiplum Dividendi*. Þetta hið sama gildir þá eins um *kvotann* og *Dividendus*, þegar engar eru leifarnar, nefnilega að *Dividendus* er *Multiplum kvotans*, og *kvotinn* mælir eða *Submultiplum Dividendi*. Úr þessum leifum (þegar þær eru), gjöra menn stundum brot, sem í rauninni ekki er annað en innfærsla nýmyndaðrar einingar, hvar um síðar talað verður. Deilingin táknast þannig $a : b = c$, ellegar: $\frac{a}{b} = c$; eða í tölum: $20 : 5 = 4$, ellegar $\frac{20}{5} = 4$. Hèr er a eða 20 *Dividendus*, b eða 5 *Divisor*, og c eða 4 *Kvotiens*. Táknanir deilingar eru því tvær: önnur tvístingurinn (:), er þá deilandi ætíð á undan, en deilir ætíð á eptir; hin er töluskript fyrir ofan og neðan lítið stryk; er þá deilandi ætíð fyrir ofan, en deilir ætíð fyrir neðan strykið.

1. Viðbót. Í deilingu er heildin skoðuð í jafnstórum pörtum. Heildin er þar *Dividendus*, í þessum dæmum a eða 20; hún inniheldur *divisor* b eða 5 nokkrum sinnum; þetta er hlutinn, sem í heildinni kemur jafn aptur og aptur. Hlutatalan er c eða 4 og segir, hvað opt hlutinn innibindist í heildinni. Ef afgangur verður, þá er hann að sönnu (optast) ójafn hinum pörtunum, en þeir hætta ekki að vera jafnir fyrir það, og það var alt af tilgangur verksins að skoða heildina í tilliti til hinna jöfnu partanna, en sá eini ójafni partur framkom eins og af tilviljun.

2. Viðbót. Sè deiling samanborin við margföldun, þá er:

Productið sama sem *dividendus*,
multiplicandus sama sem *divisor*,
og *multiplicator* sama sem *kvotiens*.

Deilir og *kvoti* eru því *Factores Dividendi*, og þar *factores*

geta skipzt um, þá getur *multiplicandus* orðið að *kvota* og *multiplicator* að *divisor*. En ekki geta menn í deilingunni eins hagkvæmlega sem í margfölduninni skipt um *factora*, þar annar þeirra er að eins kunnur, en hinn ókunnur, ef ekki er búið að finna hann. Einnig útheimtist til fullkominna umskipta, að ekki sè afgangur, heldur að hann sè gjörður að broti.

3. Viðbót. Sè deiling samanborin við frádragningu, þá er hún sama sem fleiri frádragningar með jöfnum *subtrahendis*, á sama hátt, sem margföldunin er samlagning með jöfnum *addendis*. *Dividendus* er þá sá fyrsti *minuendus*, en *divisor* er *subtrahendus*, tekinn hinn sami nokkrum sinnum, og *kvotinn* er sú tala, sem segir, hvað opt *subtrahendus* er tekinn. Í dæminu $20 : 5 = 4$ eða $\frac{20}{5} = 4$ er sú ítrekaða frádragning

$$20 - 5 - 5 - 5 - 5 = 0$$

eða

$$20 - 5 = 15;\ 15 - 5 = 10;\ 10 - 5 = 5;\ 5 - 5 = 0.$$

Með umskiptum á gjöröndunum verður hèr $\frac{20}{4} = 5$, það er

$$20 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0.$$

4. Viðbót. Eins og af kunnugri heild og hennar deild má með *subtraction* finna þá fyllandi deild (25, 1.), eða eins og af summunni og hennar eina *addendus* má með *subtraction* finna þann fyllandi *addendus*, svo má og af *producti* og þess eina *factor*, með *division* finna hinn annan *factor*. Með margföldunartöflunum (45, 2) má hæglega gjöra þetta við tölurnar fyrir innan 20.

58. Sambönd margföldunar og deilingar, sem umtöluð eru í (57), eru framsett í þessum *formulum:*

1,	*Product*	=	*Multiplicandus*	×	*Multiplicator.*
2,	*Dividendus*	=	*Divisor*	×	*Kvotiens.*
3,	*Dividendus*	=	*Kvotiens*	×	*Divisor.*
4,	*Multiplicator*	=	*Product*	:	*Multiplicandus.*
5,	*Multiplicandus*	=	*Product*	:	*Multiplicator.*
6,	*Divisor*	=	*Dividendus*	:	*Kvotiens.*
7,	*Kvotiens*	=	*Dividendus*	:	*Divisor.*

Ef afgangur er, þá er

8,	*Dividendus*	= *Divisor*	$\times$ *Kvotiens*		+	*Residuum.*
9,	*Dividendus*	= *Kvotiens*	$\times$ *Divisor*		+	*Residuum.*
10,	*Divisor*	= (*Dividendus*	— *Residuum*)		:	*Kvotiens.*
11,	*Kvotiens*	= (*Dividendus*	— *Residuum*)		:	*Divisor.*
12,	*Residuum*	= *Dividendus*	— *Divisor*		$\times$	*Kvotiens.*

58*. 1. Kunngjört framkvæmi deilist með tölu, þegar einn þess gjörandi deilist með henni, en hitt heldur sèr.

2. Tala deilist með kunngjörðu framkvæmi, þegar hún deilist með einum þess gjöranda, og sá *kvoti* aptur með öðrum gjöranda, og svo hvað af hverju, unz búið er að deila með öllum gjöröndum deilis.

Hvorttveggja þetta sannast af (58, 2), þar sem stendur: *Dividendus* = *Divisor* $\times$ *Kvotiens,* því sè þessir skoðaðir sem framkvæmi, þá fær *kvotinn* einungis þá gjörendur *dividendi,* sem *divisor* ekki hefir. Þetta táknast þannig með bókstöfum:

$abcd = a \times bcd$ ef a er *divisor*

$abcd = ab \times cd$ ef ab er *divisor*

$abcd = abc \times d$ ef abc er *divisor.*

Hèr af sèst, að bæði má í einu lagi deila með fleirum gjöröndum deilis, og líka með einum og einum, unz með öllum er deilt, því *kvotinn* fær einungis þá gjörendur *dividendi,* sem *divisor* ekki hefir. Sama væri, þó tölur væri hafðar með margföldunarmerki á milli fyrir bókstafina.

Að fyrri reglan í þessum tölulið gildir í öllum þessum deilingum, sèst enn betur þannig:

$$abcd = a \times bcd$$

má lesast a í a er 1 sinni, þá er *kvotinn* 1 bcd, en þar *coefficientinn* 1 er ekki skrifaður í bókstöfum, þá verður *kvotinn* = bcd. Hèr var fyrst gjörandi *dividendi* deildur með *divisor.* Sömuleiðis

$$abcd = (ab)cd = (ab) \times cd$$

má lesast:

(ab) í (ab) er 1 sinni, og *kvotinn* er = $1\,cd = cd$ o. s. frv.

Einnig má þannig sundra:

$$abcd = (ab)cd = a \times bcd.$$

Þetta má þannig lesa:

a í (ab) er $b$sinnum, þá *kvotinn* $b \,.\, cd = bcd$. En alt af koma

þeir gjörendur deilanda í *kvotann*, sem *divisor* ekki hefir. þess vegna tekur *kvotinn* ekki móti neinum gjöröndum *divisors*.

59. Verkefni. **Að deila tölu með einum tölustaf.**

Úrlausn. Byrja vinstra megin, og skrifa deili þeim megin í boga. Sè deilir ekki stærri en fyrsti stafur deilanda, þá deil deilandastafnum með deili, skrifa *kvotann* þar niður undan deilandastaf fyrir neðan stryk. En sè deilir stærri en fyrsti deilandastafur, þá deil tveimur fyrstu deilandastöfum með honum, og skrifa *kvotann* undir hinn síðara deilda deilandastaf. Geym afganginn, ef nokkur er, í huganum, ellegar (ef rúm er) skrifa hann fyrir ofan hinn síðara deilda deilandastaf. Les þenna afgang eins og tugastafur væri framan við næstkomanda deilandastaf, og deil þessum tveimur stöfum með deili, og skrifa *kvotann* fyrir neðan strykið rètt niður undan þeim nýtekna deilandastaf. Verði þar afgangur, geym hann eða skrifa fyrir ofan þann seinast deilda deilandastaf. þannig skal halda áfram, unz allir stafir deilanda eru deildir.

Dæmi verður ljósast hið sama, sem haft var til margföldunar í (49), því þá má saman bera mardföldun og deilingu.

Margföldun			Deiling	
3 5 5 2			3 5 5 2	
648083 (7		Deilir	7) 4536581	Deilandi
4536581			648083	*kvoti.*

Hèr eru í margfölduninni ritaðir fyrir ofan margfaldanda þeir stafir, sem þá voru geymdir í huganum, og það hver þeirra upp yfir þeim staf, sem hann átti við að leggjast. þessir hinir sömu geymdu stafir í margfölduninni verða nú einnig þeir hinir sömu; sem nú eiga að geymast í deilingunni. Nú má í deilingunni þannig taka til orða: 7 í 45 eru 6 sinnum; 6 sinnum 7 eru 42, frá 45 eru 3; skrifa 6 fyrir neðan strykið undir 5, en 3 fyrir ofan 5. þessir 3 voru afgangurinn. þar næst segi eg: 7 í 33 er 4 sinnum, því 4 sinnum 7 er 28, frá 33 er 5. Skrifa 4 undir strykið neðan 3, en 5 fyrir ofan 3. Síðan segi eg: 7 í 56 er 8 sinnum, því 7 sinnum 8 er 56; frá 56 gengur ekkert af; skrifa 8 fyrir neðan, en ekkert fyrir ofan. því næst segi eg: 7 í 5 er 0 sinnum, skrifa 0 fyrir neðan strykið, en 5 fyrir ofan. 7 í 58 er 8 sinnum, því 7 sinnum 8 er 56, frá 58 er eptir 2; skrifa 8 fyrir neðan en 2 fyrir ofan. 7 í 21 er 3svar, gengur ekkert

af; skrifa 3 fyrir neðan. Er svo kominn *kvotinn* 648083, sem áður var *multiplicandus*.

*Kvota*stafurinn á að takast svo stór, að afgangurinn aldrei verði jafnstór deilinum eða stærri en hann.

*Kvota*stafurinn má þó ekki takast svo stór, að hann, margfaldaður með deili, verði ekki dreginn frá deilanda.

Sönnun: 7 í	4536581	er	600000 sinnum	
því	4200000	=	⋮	7×600000
7 í afganginum	336581	er	40000 sinnum	
því	280000	=	⋮	7×40000
7 í afganginum	56581	er	8000 sinnum	
því	56000	=	⋮	7×8000
	581			
7 í afganginum	581	er	80 sinnum	
því	560	=	⋮	7×80
7 í afganginum	21	er	3 sinnum	
því	21	=		7×3
	0		648083 sinnum alls.	

Þannig eru þá allir partar *dividendusar* deildir.

Hann er

$$\frac{7)\ 4536581 = 4200000 + 280000 + 56000 + 560 + 21}{648083 = 600000 + 40000 + 8000 + 80 + 3.}$$

Sè nú þessi *kvoti* aptur margfaldaður með deilinum 7 eptir (50), þar hann er *polynomium,* þá framkemur aptur *dividendus.*

Reglurnar, sem nýlega voru gefnar um það, hvað stór *kvota*stafurinn ætti að takast, eru eigiulega til hægðar; en ófrávíkjanlegar eru þær ekki. Sè *kvota*stafurinn tekinn of stór, verður afgangurinn *negatif,* og sá *kvota*liður, sem kemur úr honum sameinuðum við næstkomanda *positif* deilandastaf, verður einnig *negatif.* Sè *kvota*stafurinn tekinn of lítill, þá verður næsti *kvota*stafur aptur tugum stærri. Allt jafnar sig á endanum.

Vilji eg í þessu sama dæmi bregða því fyrir mig að hafa *kvota*stafinn of stóran, þá verður það svo:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle -4-2} \quad \\ 7)\,4536581 \\ \hline 7\bar{5}\bar{2}083 \end{array}$$

Segi eg nú: 7 í 45 er 7 sinnum; þá er 7 sinnum 7 = 49, frá 45 = — 4, þá verð eg að láta það vera — 40 og taka það saman við deilandastafinn + 3, sem kemur, hefi eg þá — 40 + 3 = — 37 að deila næst. 7 í — 37 er — 5, það skrifa eg sem $\bar{5}$ í kvótann, þá $\bar{5}$

sinnum 7 er — 35, frá — 37 er — 2; þann afgang skrifa eg sem — 2 eða $\bar{2}$ fyrir ofan. Þetta verð eg að láta vera — 20; hefi eg þá — 20 + 6 = — 14; 7 í — 14 er — 2; skrifa $\bar{2}$ í kvótann. $\bar{2}$ sinnum 7 er = — 14, frá — 14 er 0. Nú kemst eg inn á alfaraveginn aptur, en hefi fengið tvo *negatifa* stafi í kvótann $\bar{5}$ og $\bar{2}$. Til að koma þessu í lag, verð eg að sundra töluna svona:

$$\begin{array}{r} 700083 \\ -\ 50000 \\ -\ \ 2000 \\ \hline 648083 \end{array}$$

Af þessu er auðsætt, að betra hefði mèr verið, að fara ekki út af venjulegu götunni, en að komast í þetta slangur.

Sú höfuðregla, sem gefin var í þessum tölulið (59), má og vel viðhafast við alla deila fyrir innan 20, ef notuð er stærri margföldunartaflan. Til samanburðar margföldunar og deilingar er hèr í þessu tilliti sett hèr dæmi upp á margföldun og deiling með 14.

Margföldun	Deiling
$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10\ 5\ 8\ 11} \\ 5\,7\,3\,5\,8\ (14 \\ \hline 8\,0\,3\,0\,1\,2 \end{array}$	$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10\ 5\ 8\ 11} \\ 14)\ 8\,0\,3\,0\,1\,2 \\ \hline 5\,7\,3\,5\,8 \end{array}$

Við margföldunina má svo taka til orða: 8 sinnum 14 er 112, skrifa 2 undir 8, en 11 geymda yfir næsta staf 5; 5 sinnum 14 er 70, og 11 geymdir er 81; skrifa 1 undir 5, en 8 geymda yfir næsta staf 3; 3svar 14 er 42, og 8 er 50; skrifa 0, en geym 5 eða set þá yfir 7; 7 sinnum 14 er 98, og 5 er 103, skrifa 3, en geym 10; 5 sinnum 14 er 70, og 10 geymdir er 80, skrifa 80.

Við deilinguna má svo taka til orða: 14 í 80 er 5 sinnum; því 5 sinnum 14 er 70, frá 80 ganga af 10; skrifa 5 undir 0, en 10 yfir 0, eða geym í huga. 14 í 103 er 7 sinnum; því 7 sinnum 14 er 98; frá 103 er 5, set 7 undir 3, en 5 yfir 3, eða geym í huga. 14 í 50 er 3svar, því 3svar 14 er 42, frá 50 er 8; set 3 undir 0, en 8 yfir 0; 14 í 81 er 5 sinnum, skrifa 5 fyrir neðan 1, en 11 fyrir ofan. 14 í 112 er 8 sinnum, skrifa 8.

Það er stundum óhentugt að skrifa þessar tölur fyrir ofan; og þess vegna er það bezt að temja sèr að geyma þær í huganum.

60. Verkefni. Að deila með stærri tölum en 20.

Úrlausn. Það er flestra venja að rita deili vinstra megin við deilanda, en *kvotann* hægra megin í boga. Nú er það optast meiri vandi að finna hinn rètta *kvota*staf, heldur en meðan deilirinn var fyrir innan 20, vegna þess hinir eptirfylgjandi stafir deilis gjöra það að verkum, að hinn fyrsti ræður ekki kvótastafnum alveg einsamall, heldur verður hann nú opt nokkuð minni.

Þegar búið er að rita deili og deilanda, skal afmarka af deilanda svo marga stafi, að einn kvótastafur fáist þar úr. Þessir stafir heita Sèrdeilandi, af því þeim er deilt i einu eða sèr í lagi. Sèrdeilandi verður að hafa í sèr jafnmarga stafi sem deilir, en sè fyrsti stafur deilis stærri en fyrsti stafur deilanda, ellegar fyrstu stafir deilis stærri en hinir tilsvarandi í deilanda, þá verður sèrdeilandi að fá einum staf fleiri en í deili eru. Með margföldunartöflunum má nú finna, hvað opt fyrsti stafur deilis er innifalinn í fyrsta eða fyrstu stöfum sèrdeilanda; sú tala er hið hæsta takmark kvótastafsins, og má kvótastafurinn aldrei vera meiri en 9. Sè nú fyrsti stafur deilis aukinn um 1, og með þeim aukna staf síðan deildur fyrsti eða fyrstu stafir sèrdeilanda, þá fæst lægsta takmark kvótastafsins. Á millum þessara takmarka skal nú fara þannig, að því nær sè gengið lægra takmarkinu, sem næsti stafur deilis er stærri, og eins því nær hinu hærra, sem hann er minni. Þó er betra að fá kvótastafinn heldur of stóran en of lítinn, og reyna hann heldur með margföldun deilisins framan frá, það er að skilja frá vinstri hendi, og draga jafnótt frá stöfunum í sèrdeilanda. Verði frádregið allsstaðar, þá er kvótastafurinn ekki of stór.

Þegar búið er að finna kvótastafinn, skal skrifa hann í *kvotann;* margfalda síðan deili með honum, og byrja þá hægra megin, skrifa svo framkvæmið staf eptir staf undir sèrdeilanda; draga síðan alt framkvæmið frá sèrdeilanda, og skrifa afganginn fyrir neðan stryk.

Þessu næst skal taka næsta staf deilanda, sem nú er ótekinn, og færa hann niður til afgangsins af þeim deilda sèrdeilanda; er þá kominn þar hinn annar sèrdeilandi, og skal fara með hann eins og hinn fyrra. Þannig skal áframhalda, unz öllu er deilt.

Dæmi. Deila skal 2005584 með 254.

254) 2005584 (Hèr eru 3 stafir í deili, en þar 25 í deili er

meira en 20 í deilanda, þá verður að taka 4 stafi í sèrdeilanda; set eg þá punkt fyrir ofan 5, svo sèrdeilandi er 2005. Því næst fer eg að finna fyrsta kvótastafinn þannig: 2 í 20 er 10 sinnum, en kvótastafurinn má aldrei vera meiri en 9. Eg eyk fyrsta staf deilis um 1, og 3 í 20 er 6 sinnum. Þá sèst, að kvótastafurinn verður að vera milli 10 og 6. Þetta leiðir af því, að þegar eg svona eyk deilisstafinn 2 um 1, þá gjöri eg ráð fyrir, að deilirinn sè 300 í staðinn fyrir 254. Eg set, að kvótastafurinn sè 8, (mitt á milli 10 og 6, þar 250 liggur hèr um mitt á milli 200 og 300), og segi: 8 sinnum 2 er 16, frá 20 er 4. Þessa 4 ímynda eg mèr framan við það 0 (hið síðara), er þá kemur næst í *dividendus*. Þá: 8 sinnum 5 er 40, frá 40 í *dividendus*, er ekkert afgangs. Er þá ekki meira eptir af sèrdeilanda en 5. Þá 8 sinnum 4 er 32, frá 5 í sèrdeilanda verður ekki dregið. Þá er 8 of stór kvótastafur. Eg tek þá 7 fyrir kvótastaf, og margfalda deilinn með honum framan frá: 7 sinnum 2 er 14, frá 20 er eptir 6; þá kemur næst 60; 7 sinnum 5 er 35, frá 60 verða tveir stafir afgangs, og þá er ætíð kvótastafurinn ekki of stór. Hann er heldur ekki of lítill, þar sá næsti fyrir ofan hann var of stór. Hann er þá sá rètti. Þess vegna skrifa eg hann í kvótann og margfalda deilinn með honum, og segi: 7 sinnum 4 er 28, skrifa 7 undir 5 í sèrdeilanda, geymi 2; 7 sinnum 5 er 35, og 2 er 37, skrifa 7, en geymi 3. 7 sinnum 2 er 14, og 3 er 17, skrifa 17.

```
254) 2005584 (7
     1778.
     ----
     2275
```

Er þá komið framkvæmið 1778; það dreg eg frá 2005, verður eptir 227, sem er og á að vera minna en deilirinn. Því næst færi eg ofan til afgangsins næsta staf deilanda 5, verður þá annar sèrdeilandi 2275. Til að ákvarða kvótastaf þar úr, segi eg: 2 í 22 er 11 sinnum; 3 í 22 er 7 sinnum. Eg reyni kvótastafinn 9, og segi: 9 sinnum 2 er 18, frá 22 er 4, þá er næst 47, 9 sinnum 5 er 45, frá 47 er 2; þá næst 25; 9 sinnum 4 er 36, frá 25 verður ekki dregið. 9 er þá of stór kvótastafur. Þá reyni eg 8, og segi: 8 sinnum 2 er 16, frá 22 er 6; þá er næst 67, 8 sinnum 5 er 40, frá 67 er mikið eptir, (tveir stafir), kvótastafurinn er 8.

```
254) 2005584 (78
     1778..
      2275.
      2032.
       2438

254) 2005584 (789
     1778..
      2275.
      2032.
       2438
       2286
        152

254) 2005584 (7896
     1778...
      2275..
      2032..
       2438.
       2286.
        1524
        1524
           0
```

Nú margfalda eg deilinn með 8, og skrifa undir sèrdeilanda 2275, dreg frá og fæ afgang 243; þá færi eg niður 8, svo sèrdeilandi verður 2438. Til að finna nýjan kvótastaf, segi eg 2 í 24 er 12 sinnum, og 3 í 24 er 8 sinnum. Kvótastafur sjálfsagt 9. Til að reyna hann segi eg: 9 sinnum 2 er 18, frá 24 er 6, þá er næst 63; 9 sinnum 5 er 45; frá 63 eru tveir stafir. Skrifa eg 9 í kvótann, margfalda deili þar með, kemur 2286, sem dregið frá 2438 gefur 152 í afgang. þangað niður færist seinasti stafur deilanda 4, verður sèrdeilandi 1524. Til að finna kvótastaf þar úr, segi eg: 2 í 15 er 7 sinnum, og 3 í 15 er 5 sinnum. Kvótastafur mitt á milli 7 og 5 er 6. 6 sinnum 254 er 1524, sem dregið frá 1524 gefur engan afgang.

þannig rita menn optast nær deilinguna. Samt eiga hèr í öllum *subtrahendunum* að undirskiljast svo mörg 0, sem stafir eru eptir í deilanda, og sömuleiðis væri rètt að færa niður til allra leifanna alla þá stafi, sem eptir eru í deilanda. þetta sèst bezt á eptirfylgjandi sönnun:

$$
\begin{array}{rcr}
\text{Deilandi} & = & 2005584 \\
254 \times 7000 & = & \underline{1778000} \\
\text{Afgangur eða leifar} & = & 227584 \\
254 \times 800 & = & \underline{203200} \\
\text{leifar} & = & 24384 \\
254 \times 90 & = & \underline{22860} \\
\text{leifar} & = & 1524 \\
254 \times 6 & = & \underline{1524} \\
\text{Kvóti} = 7896. & \text{Leifar} & = 0
\end{array}
$$

þannig eru þá allir partar deilanda deildir; hann er:

geðþekkni, ellegar skrifað aptan við kvótann brot $^4/_9$, nefnilega: afganginn fyrir ofan strykið, en deilinn fyrir neðan; og er það þá lesið: fjórir níundu partar. Maður býr sèr til, nefnilega, nýja einingu, sem heitir Níundi partur (það er að skilja úr tölunnar einingu), er þá hver eining tölunnar deild í 9 jafnstóra parta, eins og hèr hefði staðið:

$$9)\,19037623 = 19037619 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$2115291\,^4/_9 = 2115291 + {}^1/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_9$$

Eins er í seinna dæminu:

$$723)\,99548430 = 99548424 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$137688\,^6/_{723} = 137688 + {}^1/_{723} + {}^1/_{723} + {}^1/_{723} + {}^1/_{723} + {}^1/_{723} + {}^1/_{723}$$

Hèr var afgangurinn 6, en brotið $^6/_{723}$ eða 6 sjöhundruð tuttugustu og þriðju partar. Sumt í þessum *articula* verður ljósara af eptirfylgjandi *theoremi.*

61. β. *Theorema.* *Polynomium* deilist með tölu, þegar sèrhver þess liður deilist með henni.

Sönnun:

$$\frac{M}{n} = \frac{a + b + c + d + e}{n}$$
$$= \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n} + \frac{e}{n}$$

því

$$\frac{nM}{n} = \frac{na}{n} + \frac{nb}{n} + \frac{nc}{n} + \frac{nd}{n} + \frac{ne}{n} =$$
$$M = a + b + c + d + e \qquad (58,_5)$$

62. Þegar 0 er aptan við *divisor,* þá má skera þau aptan af, hvað mörg sem eru, og þá eins marga stafi aptan af *dividendus.* En verði afgangur í *dividendus*, þegar komið er að afskurðarstrykinu, þá skrifast sá afgangur ásamt hinum afskornu stöfum í brot fyrir ofan stryk, en allur deilirinn undir, t. d.

789456 : 6000

$$6|000)\;78\overset{3}{9}|456$$
$$131\,^{3456}/_{6000}$$

Hèr er þá einungis deilt með 6, en að öðru leyti aðfarið eins og nú var sagt.

Þegar 0 eru bæði aptan við deili og deilanda, þá má skera jafnmörg aptan af báðum, t. d.

8775717849152 : 89061032

1	89061032
2	178122064
3	267183096
4	356244128
5	445305160
6	534366192
7	623427224
8	712488256
9	801549288

```
89061032) 8775717849152 (98536
          801549288....
           760224969...
           712488256...
            477367131..
            445305160..
             320619715.
             267183096.
              534366192
              534366192
                      0
```

Í töflunni má prófa hið 3falda með því að leggja saman hið 1falda og 2falda, hið 4falda með því að 2falda hið 2falda; eins hið 5falda = (3 + 2)falt; hið 6falda = (3 . 2)falt; hið 7falda = (3 + 4) f.; hið 8falda = (2 . 4) f., og hið 9falda = (3 . 3) f.; og allsstaðar með einhverri *addition*. Hèr þarf þá einungis að leita upp í töflunni tölur þær, sem jafnar eru eða næstminni en sèrdeilandi, og skrifa þær undir hann, og draga frá; en skrifa í kvótann um leið tölustaf þann, sem stendur út undan hinni teknu tölu í töflunni.

61. Dæmi upp á það þegar afgangur verður:

```
     1 1 4 2 8 1 4
9) 1 9 0 3 7 6 2 3
   ---------------
     2 1 1 5 2 9 1
```

```
723) 99548430 (137688
     723.....
     2724....
     2169....
      5558...
      5061...
       4974..
       4338..
        6363.
        5784.
         5790
         5784
            6
```

Í fyrra dæminu er afgangurinn 4, getur maður þá annaðhvort skilið svona við, og skrifað ekkert brot, en notað afganginn eptir

sama bókstafs, þannig að vísar þeirra velda fari annaðhvort vaxandi eða minkandi.

2. Deil fyrsta lið deilanda með fyrsta lið deilis, og skrifa það, sem út kemur, í kvótann. Það verður fyrsti liður kvótans.

3. Með fyrsta lið kvótans margfalda allan deilinn, og skrifa undir deilanda það sem út kemur.

4. Það sem út kom, skal draga frá deilanda, og skrifa afganginn fyrir fyrir neðan stryk, ásamt öllum þeim liðum deilanda, sem ódeildir eru.

5. Því næst skal með fyrsta lið deilis deila einum lið af þeim, sem standa fyrir neðan strykið, skrifa í kvótann, margfalda þar með allan deilinn, og draga frá eins og áður.

6. Þannig ræður ætíð fyrsti liður deilis kvótaliðunum; en með kvótaliðunum margfaldast allur deilirinn, t. d.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
3a - b) & 15a^3 & - 14a^2b & + 24ab^2 & - 7b^3 & (5a^2 - 3ab + 7b^2 \\
 & 15a^3 & - 5a^2b & & & \\
 & - & + & & & \\
\hline
 & & - 9a^2b & + 24ab^2 & - 7b^3 & \\
 & & - 9a^2b & + 3ab^2 & & \\
 & & + & - & & \\
\hline
 & & & + 21ab^2 & - 7b^3 & \\
 & & & + 21ab^2 & - 7b^3 & \\
 & & & - & + & \\
\hline
 & & & & 0 & \\
\end{array}
$$

Fyrsti liður deilis ræður hèr kvótunum, því $15a^3 : 3a = 5a^2$. Með $5a^2$ margfaldast allur deilirinn, þannig: $(3a - b)\ 5a^2 = 15a^3 - 5a^2b$. Þetta *product* dregst frá deilanda, og merkin breytast. Þá verður afgangurinn $- 9a^2b + 24ab^2 - 7b^3$. Nú er aptur deilt með fyrsta lið deilis $3a$, sem ræður aptur kvótanum, nefnilega $- 9a^2b : 3a = - 3ab$. Með þessum kvóta margfaldast allur deilirinn : $3a - b \times - 3ab = - 9a^2b + 3ab^2$ sem dregið frá afgangi deilanda gefur nýjan afgang $21ab^2 - 7b^3$. Loksins er eins deilt $21ab^2 : 3a = 7b^2$, sem verður seinasti kvótaliður. Seinast margfaldast $(3a - b)$. $7b^2 = 21ab^2 - 7b^3$ og dregst það frá næsta afgangi deilanda, verður ekkert eptir.

Sönnun úrlausnarinnar.

Þar deilir og kvóti eru gjörendur deilanda, þá á framkvæmi

þeirra að vera = deilanda, þegar enginn afgangur er (58,3). En þar deilir og kvóti eru *polynomia,* þá á sá eini þeirra allur, hèr deilir, að margfaldast með sèrhverjum lið hins annars (hèr kvótans), og *partialproductin* leggjast saman (53,2). Þannig er þá í í þessu dæmi:

$$\begin{array}{llll}
(3a-b)\times & 5a^2 & = 15a^3 - 5a^2b & \\
(3a-b)\times & -3ab & = \quad -9a^2b + 3ab^2 & \\
(3a-b)\times & 7b^2 & = \quad\quad 21ab^2 - 7b^3 & \\
\hline
\textit{Product} & & = 15a^3 - 14a^2b + 24ab^2 - 7b^3 = \textit{dividendus}. &
\end{array}$$

Að þetta sè öldúngis sama sem margföldun deilis með kvótanum, sèst af þessari margföldun:

$$\begin{array}{lllll}
3a & -b & & & \\
5a^2 & -3ab & +7b^2 & & \\
\hline
15a^3 & -5a^2b & & & \\
 & -9a^2b & +3ab^2 & & \\
 & & +21ab^2 & -7b^3 & \\
\hline
15a^3 & -14a^2b & +24ab^2 & -7b^3. &
\end{array}$$

Dæmi, sem vèr höfum haft í margfölduninni (54).

$$\begin{array}{llllll}
a+b) & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \; (a^2 + 2ab + b^2 \\
 & a^3 + a^2b \\
 & - \quad - \\
\hline
 & \quad 2a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 & \quad 2a^2b + 2ab^2 \\
 & \quad - \quad - \\
\hline
 & \quad\quad ab^2 + b^3 \\
 & \quad\quad ab + b^3 \\
 & \quad\quad - \quad - \\
\hline
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Dæmi með ótilteknum *exponentum,* sem einnig var í margfölduninni (54), stendur í deilingu þannig:

$$
\begin{array}{rl}
x - a)\ x^n - a^n\ (& x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + a^4x^{n-5} \\
x^n - ax^{n-1} & \\
- \quad + \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a^{n-2}x + a^{n-1} \\
\hline
ax^{n-1} - a^n & \\
ax^{n-1} - a^2x^{n-2} & \\
- \quad + \quad & \\
\hline
a^2x^{n-2} - a^n & \\
a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} & \\
- \quad + \quad & \\
\hline
a^3x^{n-3} - a^n & \\
a^3x^{n-3} - a^4x^{n-4} & \\
- \quad + \quad & \\
\hline
a^4x^{n-4} - a^n & \\
a^4x^{n-4} + a^5x^{n-5} & \\
- \quad - \quad & \\
\hline
. \quad . \quad &
\end{array}
$$

Nú getum vèr stokkið þangað, sem afgangurinn hefir x^2, og verður þar að vera a^{n-2}, því summa *exponentanna* við a og x á að vera $= n$, svo afgangurinn verður

$$
\begin{array}{c}
a^{n-2}x^2 - a^n \\
a^{n-2}x^2 - a^{n-1}x \\
- \qquad + \\
\hline
a^{n-1}x - a^n \\
a^{n-1}x - a^n \\
- \qquad + \\
\hline
0
\end{array}
$$

þessi deiling teiknast stuttlega þannig:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1} \quad \ldots A$$

þessi *formula* kemur opt til gagns. Sè nù *exponentinn* n jöfn tala, svo sem 2, 4, 6, 8 o. s. frv., þá má út af *formulu* þessari fá kvótann $\frac{x^n - a^n}{x + a}$ með því að breyta a í $-a$, því þá verður deilirinn $x - (-a) = x + a$, og deilandi $x^n - (-a)^n$. þetta kemur af því, að lík merki í margföldun gefa $+$, en ólík

merki —, (53). Sè því $n = 2$, þá er $(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$, og $x^n - (-a)^n = x^n - a^n$. Sè $n = 4$, þá er $(-a)^4 = (-a)(-a)(-a)(-a) = +a^4$ og $x^n - (-a)^4 = x^n - a^4$ o. s. frv. Þá verður í kvótanum sá annar, 4., 6., 8. liður með merkinu —, og eins sá seinasti, því $n - 1$ er ójöfn tala, þegar n er jöfn tala. Til þess að þetta verði ljósara, viljum vèr deila $x^6 - a^6$ með $x + a$, þannig:

$$
\begin{array}{l}
x + a)\ x^6 - a^6\ (x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5 \\
\qquad\quad x^6 + ax^5 \\
\qquad\quad - \quad - \\
\hline
\qquad - ax^5 - a^6 \\
\qquad - ax^5 - a^2x^4 \\
\qquad + \quad\ + \\
\hline
\qquad\quad a^2x^4 - a^6 \\
\qquad\quad a^2x^4 + a^3x^3 \\
\qquad - \quad\ - \\
\hline
\qquad - a^3x^3 - a^6 \\
\qquad - a^3x^3 - a^4x^2 \\
\qquad + \quad\ + \\
\hline
\qquad\quad a^4x^2 - a^6 \\
\qquad\quad a^4x^2 + a^5x \\
\qquad - \quad\ - \\
\hline
\qquad - a^5x - a^6 \\
\qquad - a^5x - a^6 \\
\qquad + \quad\ + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Með líkum hætti má finna kvótann $\frac{x^n + a^n}{x + a}$ ef n er ójöfn tala, svo sem 3, 5, 7, 9 o. s. frv., með því að snúa a í $-a$; því deilirinn $x - a$ breytist þá í $x - (-a) = x + a$, og deilandi í $x^n - (-a)^n$, sem ef n er ójöfn tala, verður $x^n + a^n$, því þá er $(-a)^n = -a^n$, og $x^n - (-a)^n = x^n - (-a^n) = x^n + a^n$.

Til að sýna þetta ljósar, deilum vèr $x^7 + a^7$ með $x + a$, þannig:

$$
\begin{array}{l}
x + a)\; x^7 + a^7 \;(x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6 \\
\quad x^7 + ax^6 \\
\quad - \quad - \\
\hline
\quad - ax^6 + a^7 \\
\quad - ax^6 - a^2x^5 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\quad a^2x^5 + a^7 \\
\quad a^2x^5 + a^3x^4 \\
\quad - \quad - \\
\hline
\quad - a^3x^4 + a^7 \\
\quad - a^3x^4 - a^4x^3 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\quad a^4x^3 + a^7 \\
\quad a^4x^3 + a^5x^2 \\
\quad - \quad - \\
\hline
\quad - a^5x^2 + a^7 \\
\quad - a^5x^2 - a^6x \\
\quad + \quad + \\
\hline
\quad a^6x + a^7 \\
\quad a^6x + a^7 \\
\quad - \quad - \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

Menn geta innibundið þessar tvær deilingar í einni *formulu*, líkri aðal-*formulunni*, þannig :

$$\frac{x^n \mp a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + a^4x^{n-5}$$
$$- a^5x^{n-6} + a^6x^{n-7} \ldots \pm a^{n-2}\, x \mp a^{n-1} \quad \ldots\; B.$$

En þar sem hèr standa tvö merki $\mp$ eða $\pm$, eiga efri merkin að lesast, þegar n er jöfn tala, en hin neðri, þegar n er ójöfn tala.

65. Í bókstafareikningi framkoma opt brot í deilingu eins og í talnareikningi, þegar afgangur verður af deilanda, eða ekki gengur upp; er þá eins aðfarið, nefnilega afgangurinn er skrifaður fyrir ofan stryk, en deilirinn undir. Dæmi þar upp á getur verið í *formulunni B*, ef n er ójöfn tala og deila skal $\frac{x^n - a^n}{x + a}$, ellegar ef n er jöfn tala og deila skal $\frac{x^n + a^n}{x + a}$. Setjum $n = 5$ og deilum:

$$x + a)\; x^5 - a^5 \;(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 + \frac{-2a^5}{x+a}$$

$$\begin{array}{rlrl}
 & x^5 & + & ax^4 \\
- & & - & \\ \hline
- & ax^4 & - & a^5 \\
- & ax^4 & - & a^2x^3 \\
+ & & + & \\ \hline
 & a^2x^3 & - & a^5 \\
 & a^2x^3 & + & a^3x^2 \\
- & & - & \\ \hline
- & a^3x^2 & - & a^5 \\
- & a^3x^2 & - & a^4x \\
+ & & + & \\ \hline
 & a^4x & - & a^5 \\
 & a^4x & + & a^5 \\
- & & - & \\ \hline
- & 2a^5 & &
\end{array}$$

Setjum $n = 6$ og deilum $\dfrac{x^6 + a^6}{x + a}$

$$x + a)\; x^6 + a^6 \;(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5 + \frac{2a^6}{x+a}$$

$$\begin{array}{rlrl}
 & x^6 & + & ax^5 \\
- & & - & \\ \hline
- & ax^5 & + & a^6 \\
- & ax^5 & - & a^2x^4 \\
+ & & + & \\ \hline
 & a^2x^4 & + & a^6 \\
 & a^2x^4 & + & a^3x^3 \\
- & & - & \\ \hline
- & a^3x^3 & + & a^6 \\
- & a^3x^3 & - & a^4x^2 \\
+ & & + & \\ \hline
 & a^4x^2 & + & a^6 \\
 & a^4x^2 & + & a^5x \\
- & & - & \\ \hline
- & a^5x & + & a^6 \\
- & a^5x & - & a^6 \\
+ & & + & \\ \hline
 & 2a^6 & &
\end{array}$$

Viðbót. $x - a$ gengur ætíð upp í $x^n - a^n$, hvaða tala sem n er. Þar á móti gengur $x + a$ upp í $x^n - a^n$ einungis ef n er jöfn tala, og upp í $x^n + a^n$, ef n er ójöfn tala.

66. Enn nokkur dæmi.

$$
\begin{array}{l}
1 - 2x + x^2)\ 1 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1}\ (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \\
\qquad\quad 1 - 2x + x^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ nx^{n-1} \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 2x - x^2 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 2x - 4x^2 + 2x^3 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 3x^2 - 2x^3 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 4x^3 - 3x^4 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 4x^3 - 8x^4 + 4x^5 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 5x^4 - 4x^5 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 5x^4 - 10x^5 + 5x^6 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 6x^5 - 5x^6 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 6x^5 - 12x^6 + 6x^7 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 7x^6 - 6x^7 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 7x^6 - 14x^7 + 7x^8 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 8x^7 - 7x^8 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1} \\
\qquad\quad 8x^7 - 16x^8 + 8x^9 \\
\qquad\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

Hèr í má finna stöðugt lögmál eða reglu, nefnilega ef kvótaliðarins sæti teiknast með m, þá verður kvótaliðurinn sjálfur mx^{m-1}, og sá afgangur, sem þessi kvótaliður fæst úr, verður:

$$mx^{m-1} - (m - 1)\,x^m - (n + 1)\,x^n + nx^{n+1}$$

Produkt kvótaliðar og deilis, sem þar undir ritast

$$mx^{m-1} - 2mx^m + mx^{m+1}$$
$$- \quad + \quad -$$

þannig má alt af áframhalda, ellegar stökkva svo langt sem vill, þangað til loksins að því kemur, að verður $m = n$, þá fá báðir miðliðirnir í afganginum sama *exponent*, hlaupa þeir þá saman í einn lið $-2nx^n$ (þar þeir eru samkynja (21)), svo bæði afgangurinn og sá með kvótaliðnum margfaldaði deilir fá þessa ásýnd:

$$\begin{array}{c} nx^{n-1} - 2nx^n + nx^{n+1} \\ nx^{n-1} - 2nx^n + nx^{n+1} \\ - \quad + \quad - \\ \hline 0 \end{array}$$

þetta dæmi má styttra skrifa þannig:

$$\frac{1 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1}}{1 - 2x + x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + nx^{n-1}$$

ellegar þannig:

$$\frac{1 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + nx^{n-1}$$

þess háttar *polynomia,* sem fylgja vissri reglu eða lögmáli, eins og hèr er hægra megin við jafnaðarmerkið, kallast *series,* (raðir, talnaraðir, eða töluhlaup). þær eru margs háttar og óteljandi í tölvísinni. Hèr má x merkja hvaða tölu sem vill; stendur þá ætíð heima, að jafnt sè hægra megin og vinstra. Má opt súmmera langar raðir án þess að leggja þær saman lið eptir lið, einungis með því að gæta að stærðinni vinstra megin og reikna hana út í tölu. En hèr er óþægilegt að láta röðina vera mjög langa, ef x er nokkuð stór tala, því hin háu veldi verða þá óviðráðanleg. Sè samt x jafnt einhverju broti, þá má gjöra röðina endalausa. Sè þar á mót $x = 1$ eða stærri tölu, þá má ekki gjöra hana endalausa, en endanleg má hún vera, með því

móti stendur hún heima en annars ekki. Um þær endalausu raðir (*series infinitæ*) verður síðar talað. Eg vil reyna að súmmera 30 liði af þessari og láta x vera $= 2$. Þá verður að hefja 2 upp í 29., 30. og 31. veldi. Það má gjöra þannig: $2^5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 32$; $2^{10} = (2^5)^2 = 32^2 = 1024$; $2^{30} = (2^{10})^3 = 1073741824$; helmingurinn þar af $2^{30} : 2 = 2^{29} = 2^{30-1} = 536870912$; og $2^{31} = 2^{30+1} = 2^{30} \,.\, 2 = 1073741824 \,.\, 2 = 2147483648$.

Þess vegna verður $\dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-2)^2} = \dfrac{1-31 \,.\, 1073741824 + 30 \,.\, 2147483648}{(-1)^2} = \dfrac{1 - 33285996544 + 64424509440}{1} = 31138512897$.

Þessi tala verður því summa allra 30 liðanna þessarar töluraðar $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \cdots 30x^{29} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 \cdots + 16106127360$.

67. Lík þessari talnaröð er hin eptirfylgjandi:

$$\frac{1 - \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + n(n+2)\,x^{n+1} - \dfrac{n(n+1)}{2}x^{n+2}}{(1-x)^3}$$
$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$$

þar sem n má vera sèrhver *positif* heil tala. Hún verður einnig liðafjöldinn í kvótanum eða talnaröðinni. Setjum til dæmis $n = 8$, þá er

$$\frac{1 - \dfrac{9 \,.\, 10}{2}x^8 + 8 \,.\, 10x^9 - \dfrac{8 \,.\, 9}{2}x^{10}}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = 1 + 3x + 6x^2$$
$+ 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7$ ellegar

$$\frac{1 - 45x^8 + 80x^9 - 36x^{10}}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 +$$
$15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7$.

Að deilirinn $(1-x)^3$ sè sama sem deilirinn $1 - 3x + 3x^2 - x^3$, má sjá af (54. *B*), ellegar þannig:

$$
\begin{array}{l}
1 - x \\
\underline{1 - x} \\
1 - x \\
\underline{\quad - x + x^2} \\
1 - 2x + x^2 = (1-x)^2 \text{ eða } \textit{kvaðratið} \text{ af } (1-x) \\
\underline{1 - x} \\
1 - 2x + x^2 \\
\underline{\quad - x + 2x^2 - x^3} \\
1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1-x)^3 \text{ eða } \textit{cubus} \text{ (teningur) af } 1-x.
\end{array}
$$

Til þess nú að sjá, hvernig lögmálið kvótaliðanna $\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ fundið verður, sem einnig kallast *terminus generalis seriei* (sá almenni liður raðarinnar), þá viljum vèr deila þessu bókstafadæmi. Vèr höfum sömu aðferð sem í dæminu (66). En vegna rúmleysis skrifast hèr kvótinn fyrir ofan deilanda, fyrir ofan stryk, og þar fyrir ofan sætistölur liðanna, sem kallast *n*.

$$
\begin{array}{ll}
 & n = \overset{1}{(1} + \overset{2}{3x} + \overset{3}{6x^2} + \overset{4}{10x^3} + \overset{5}{15x^4} + \overset{6}{21x^5} + \overset{7}{28x^6} + \overset{8}{36x^7} + \overset{9}{45x^8} + \overset{10}{55x^9} \\
\hline
1 - 3x + 3x^2 - x^3) & 1 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + n(n+2)\, x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} x^{n+2} \\
(n = 1) & 1 \quad - \quad 3x \quad + \quad 3x^2 \quad - \quad x^3 \\
 & - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(n = 2) & 3x \quad - \quad 3x^2 \quad + \quad x^3 \quad - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} x^{n+2} \\
 & 3x \quad - \quad 9x^2 \quad + \quad 9x^3 \quad - \quad 3x^4 \\
 & - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(n = 3) & 6x^2 \quad - \quad 8x^3 \quad + \quad 3x^4 \quad - \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} x^{n+2} \\
 & 6x^2 \quad - \quad 18x^3 \quad + \quad 18x^4 \quad - \quad 6x^5 \\
 & - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(n = 4) & 10x^3 \quad - \quad 15x^4 \quad + \quad 6x^5 \quad - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} x^{n+2} \\
 & 10x^3 \quad - \quad 30x^4 \quad + \quad 30x^5 \quad - \quad 10x^6 \\
 & - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(n = 5) & 15x^4 \quad - \quad 24x^5 \quad + \quad 10x^6 \quad - \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + n(n+2)x^{n+1} \\
 & 15x^4 \quad - \quad 45x^5 \quad + \quad 45x^6 \quad - \quad 15x^7 \\
 & - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
\end{array}
$$

$$(n = 6)\quad \begin{array}{lllllllll} 21x^5 & - & 35x^6 & + & 15x^7 & - & \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}x^{n+2} \\ 21x^5 & - & 63x^6 & + & 63x^7 & - & 21x^8 \\ - & + & & - & & + & \end{array}$$

$$(n = 7)\quad \begin{array}{lllllllll} 28x^6 & - & 48x^7 & + & 21x^8 & - & \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}x^{n+2} \\ 28x^6 & - & 84x^7 & + & 84x^8 & - & 28x^9 \\ - & + & & - & & + & \end{array}$$

$$(n = 8)\quad \begin{array}{lllllllll} 36x^7 & - & 63x^8 & + & 28x^9 & - & \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}x^{n+2} \\ 36x^7 & - & 108x^8 & + & 108x^9 & - & 36x^{10} \\ - & + & & - & & + & \end{array}$$

$$(n = 9)\quad \begin{array}{lllllllll} 45x^8 & - & 80x^9 & + & 36x^{10} & - & \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}x^{n+2} \\ 45x^8 & - & 135x^9 & + & 135x^{10} & - & 45x^{11} \\ - & + & & - & & + & \end{array}$$

$$(n = 10)\quad \begin{array}{lllllllll} 55x^9 & - & 99x^{10} & + & 45x^{11} & - & \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + n(n+2)x^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}x^{n+2} \\ 55x^9 & - & 165x^{10} & + & 165x^{11} & - & 55x^{12} \\ - & + & & - & & + & \end{array}$$

Sætistölurnar n eru hèr líka skrifaðar vinstra megin við reikníngin, hver í sínu sæti út undan afganginum, og þeim með kvótaliðnum margfaldaða deili, svo sjá megi hvort uppgengur ellegar ekki. Hèr gengur upp hvenær sem vill, og maður getur látið kvótann eða töluröðina hætta eptir svo marga liði sem honum þóknast, t. a. m. eptir 10 liði. Setur hann þá $n = 10$ í þeim afgangi, þar sem sætistalan $n = 10$ stendur út undan. Þá fær afgangurinn þetta yfirbragð

$$55x^9 - 99x^{10} + 45x^{11} - \frac{(10+1)(10+2)}{2}x^{10} + 10.12x^{11} - \frac{10.11}{2}x^{12}$$

eða

$$55x^9 - 99x^{10} + 45x^{11} - \frac{11.12}{2}x^{10} + 10.12x^{11} - \frac{10.11}{2}x^{12}$$

eða

$$55x^9 - 99x^{10} + 45x^{11} - 66x^{10} + 120x^{11} - 55x^{12}$$

og þegar samkynja liðir sameinast

$$55x^9 - 165x^{10} + 165x^{11} - 55x^{12}$$ og hèr frá dregst

$$\begin{array}{cccc} 55x^9 & -\ 165x^{10} & +\ 165x^{11} & -\ 55x^{12} \\ - & + & - & + \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Þannig er þá alt uppgengið. En til að sjá lögmál það, er kvótaliðirnir fara eptir, þarf hèr ekki annað en taka eptir því, að seinasti liður *divisors* x^3 hefir sama *coefficient*, nefnilega 1, sem fyrsti liður sem er 1, hvar af þá kemur, þegar búið er að margfalda deilinn með kvótaliðnum, að þá verður ætíð í *produktinu* seinasta liðar *coefficient* = fyrsta liðar *coefficienti*, nefnilega hèr 55; en $55x^{12}$ er sama sem $\frac{n.(n+1)}{2}x^{n+2}$, svo að $\frac{n.(n+1)}{2} = 55$, sem er *coefficient* 10. liðar. Lögmálið kvótaliðanna er þá $\frac{n.(n+1)}{2}x^{n-1}$. Eins hefði mátt láta kvótann hætta hvenær sem vildi, svo sem eptir 1. lið, þar sem $n = 1$; þar verður deilandi

$$1 - \frac{(1+1)(1+2)}{2}x + 1.3x^2 - \frac{1.2}{2}x^3$$

eða

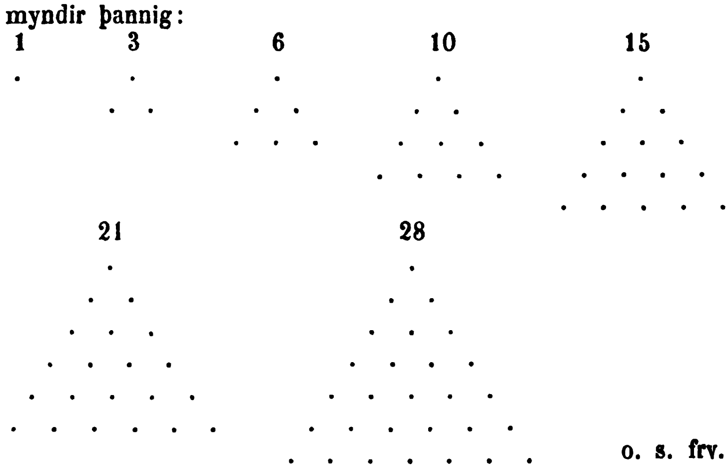
$$1 - 3x + 3x^2 - \frac{1.2}{2}x^3$$

$1 - 3x + 3x^2 - x^3$. Þetta deilist með *divisor*, sem er

hinn sami, verður kvótinn $= 1$; seinasti liðurinn $\frac{1 \, . \, 2}{2} x^3 = 1x^3 = \frac{n \, . \, (n+1)}{2} x^{n+2}$ og *coefficientinn* $\frac{n \, . \, (n+1)}{2}$ eins og annarsstaðar, svo þar ríkir sama lögmál, að kvótaliðurinn sè $= \frac{n \, . \, (n+1)}{2} x^{n-1}$. Kvótinn eða *series* er þá $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 \cdots\cdots\cdots + \frac{n \, (n+1)}{2} x^{n-1}$

Sömu aðferð mátti hafa við dæmið (66), að skrifa sætistölurnar n útundan hverjum afgangi.

Merk! *Coefficientarnir* í þessari talnaröð heita þríhyrndu tölurnar (*numeri trigonales*), af því það má raða þeim í þríhyrndar myndir þannig:



o. s. frv.

68. Ein merkileg deiling og *series* er þessi eptirfylgjandi:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} \quad \cdots\cdots A$$

og út af henni fæst önnur með því að setja $-x$ fyrir $+x$, nefnilega

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots\cdots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x} \quad \cdots\cdots B$$

Í þessari röð á að fara eptir efri merkjunum, ef n er ójöfn tala, en hinum neðri, ef n er jöfn tala.

Dæmi í tölum upp á töluröðina A. Setjum $x = 12$ og $n = 9$, þá er

$$\frac{1}{1-12} = \frac{1}{-11} = 1 + 12 + 12^2 + 12^3 + 12^4 + 12^5 + 12^6 + 12^7 + 12^8 + \frac{12^9}{-11}$$

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 12^0 \\
12 & = & 12^1 \\
144 & = & 12^2 \\
1728 & = & 12^3 \\
20736 & = & 12^4 \\
248832 & = & 12^5 \\
2985984 & = & 12^6 \\
35831808 & = & 12^7 \\
429981696 & = & 12^8 \\
\hline
469070941 & = & \textit{series}\ 12^0 \cdots\cdots\cdots 12^8 \\
-469070941\tfrac{1}{11} & = & \text{seinasti liður} \\
\hline
-\tfrac{1}{11} & = & \text{summu } \textit{seriei}\ 12^0 \cdots\cdot 12^8 \text{ og seinasta liðar.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
-11)\,5159780352 & = & 12^9 \\
\hline
-469070941\tfrac{1}{11} & = & -\dfrac{12^9}{11}
\end{array}$$

Hèr er því jafnmikið báðum megin við jafnaðarmerkið. Sama hefði framkomið, hvað margir eða fáir liðir sem hefði verið teknir. Vèr viljum reyna að taka tvo, þá væri

$$\frac{1}{1-12} = \frac{1}{-11} = 1 + \frac{12}{-11}$$

$$\frac{-1}{11} = 1 - 1\tfrac{1}{11} \text{ það er } -\frac{1}{11} = -\frac{1}{11}$$

Hèr má sjá, að summa allra undangangandi liða í talnaröðinni $1 + 12 + 12^2 \cdots\cdot 12^8$ nemur það í burtu, sem seinasti liðurinn $\frac{12^9}{-11}$ yfirgengur stærðina $\frac{1}{-11}$ sem er vinstra megin við jafnaðarmerkið, og að af þessu kemur jöfnuðurinn báðum megin. Þetta getum vèr og sèð af bókstafareikningnum af talnaröðinni A

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots\cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

Dragi menn hèr $\frac{1}{1-x}$ frá $\frac{x^n}{1-x}$, þá fæst $\frac{x^n-1}{1-x}$, sem er $= -\frac{x^n-1}{x-1}$ (því hèr hefir deilirinn fengið umsnúin merki, svo kvótinn fær nú — í staðinn fyrir að hann hafði áður +). En þessi stærð er $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \cdots\cdot x^2 + x + 1$ eptir *formulunni* (64, *A*), þegar í henni er sett $a = 1$; þá er auðsætt að *negatifa* stærðin $-\frac{x^n-1}{x-1}$ sem liðurinn $\frac{x^n}{1-x}$ hefir fram yfir $\frac{1}{1-x}$ bætist upp aptur af talnaröðinni $1 + x + x^2 + \cdots\cdot + x^{n-1}$. En þetta má þó enn reglulegar skoða þannig:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$
$$\frac{1}{1-x} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{1-x} \text{ drag frá}$$
$$- \qquad\qquad -$$

$$0 = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}$$

En $\dfrac{x^n}{1-x} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x^n-1}{1-x} = -\dfrac{x^n-1}{x-1}$, þess vegna

$$0 = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1} - \frac{x^n-1}{x-1}$$

En eptir (64, *A*) er

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \cdots + x + 1$$

$$0 = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1} - (x^{n-1} + x^{n-2} \cdots x + 1)$$

Hèr má sjá, að þegar búið er að taka $\frac{1}{1-x}$ burt, þá vinnur sig alt hitt upp og verður = 0.

Merk! Hèr þurfti að nota frádragningu $\frac{1}{1-x}$ frá $\frac{x^n}{1-x}$; en ekki er búið að skýra frá frádragningu brota. Þó má hæglega hjálpa sèr út af þessu, og það með tvennu móti. 1. Í (61) var sýnt, að brotið $^6/_{728}$ eigi að lesast 6 sjöhundruðustu tuttugustu og þriðju partar. Eins má hèr lesa $\frac{1}{1-x}$ sem væri 1 $(1-x)$ti partur, og $\frac{x^n}{1-x}$ sem væri x^n $(1-x)$tu partar. Nú má draga frá

x^n $(1-x)$tu partar
1 $(1-x)$ti partur

verður eptir x^n-1 $(1-x)$tu partar, það er $\dfrac{x^n-1}{1-x}$

2. Má skoða þessar stærðir sem tvær deilingar. Sè nú deilinum $(1-x)$ kastað burt úr $\frac{1}{1-x}$ og $\frac{x^n}{1-x}$, þá verða þær stærðir 1 og x^n og báðar $(1-x)$faldar við það, sem þær eiga að vera. Nú má draga 1 frá x^n, kemur mismunurinn x^n-1. En þar *minuendus* og *subtrahendus* voru $(1-x)$faldir við það, sem þeir áttu að vera, þá verður og mismunurinn x^n-1 að vera $(1-x)$ sinnum of stór; og það lagast með því að deila honum með $1-x$; kemur $\dfrac{x^n-1}{1-x}$.

69. *Theorema.* *Product* tveggja eða fleiri kunngjörðra kvóta er = *producti dividendanna divideruðu* með *producti divisoranna*, eða

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$$

Sönnun. $\frac{k}{l} = p$

$\frac{m}{n} = q$

þetta margfaldað saman gefur

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = pq$$

þessi stærð pq á nú að ákvarðast af stærðunum k, l, m, og n.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Af } \frac{k}{l} = p \text{ leiðir } k = lp \\ \text{og af } \frac{m}{n} = q \text{ leiðir } m = nq \end{array}\right\} \text{því } \textit{dividendus} = \text{kvóti} \times \textit{divisor} \ (58,\ 3).$$

$$km = lpnq$$

$$\text{eða } km = ln \times pq$$

Hér er km *product*, ln *multiplicandus*, og pq sá eptirleitaði *multiplicator*. þar nú

multiplicator = *product* : *multiplicandus* (58, 4)

þá er $pq = km : ln$

eða $pq = \frac{km}{ln}$

en $pq = \frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ áður fundið,

þess vegna $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$, er sannast átti.

Dæmi í tölum

$$^{24}/_{8} \times {}^{18}/_{9} = {}^{24 \cdot 18}/_{8 \cdot 9} = {}^{432}/_{72} = 6$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$\text{ɔ: } p \times q = pq$$

Hér gengu deilarnir upp í deilöndunum; þar á móti ekki í

$$^{7}/_{9} \times {}^{10}/_{11} = {}^{70}/_{99}$$

þetta eru tvö brot margfölduð saman.

Viðbót. þegar stærð er margfölduð með eiginlegu broti, eða þegar deilir er stærri en hans deilandi, þá minkar sú stærð, sem margfölduð er t. a. m.: Hér var $11 > 10$, þá er $^{7}/_{9} \times {}^{10}/_{11} < {}^{7}/_{9} \times {}^{11}/_{11}$, því hægra megin er stærri margfaldari en $^{7}/_{9} \times {}^{11}/_{11} = {}^{7}/_{9} \times 1$, því $^{11}/_{11} = 1$

þá $^{7}/_{9} \times {}^{10}/_{11} < {}^{7}/_{9} \times 1$.

þess vegna þegar stærð er margfölduð með eiginlegu broti, þá verður *productið* minna en ef hún væri margfölduð með 1. Með öðrum orðum: Stærð minkar, þegar hún er marfölduð með eiginlegu broti. Með sama hætti má sýna, að $^{10}/_{11}$ minkar, þegar það er margfaldað með $^{7}/_{9}$.

Í bókstöfum væri þetta svo:

Sè $m < n$, þá er

$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} < \frac{k}{l} \times \frac{n}{n}$; því hægra megin er margfaldað með stærra.

$\frac{k}{l} \times \frac{n}{n} = \frac{k}{l} \times 1$, því $\frac{n}{n} = 1$

þá $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} < \frac{k}{l} \times 1$.

70. *Thorema.* Talnaraðirnar A og B (68) verða merkilegri, þegar í þeim x er minna en 1, því þá má sleppa brotinu með því móti að gjöra þær óendanlegar; því þá minkar afgangurinn óendanlega, og x^n verður $= 0$, þegar liðafjöldinn n er óendanlega stór, er táknast $n = \infty$, því þegar brotin hefjast upp í veldi, þá minka þau, vegna þess þau margfaldast með sjálfum sèr og þess vegna með broti. Þannig verður $x^2 < x$, $x^3 < x^2$, $x^4 < x^3$ o. s. frv. (69, 1), t. d. ef $x = {}^1/_2$ (ɔ: hálfur), þá er $x^2 = {}^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$ (ɔ: einn fjórði partur), $x^3 = {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4 \times {}^1/_2 = {}^1/_8$; $x^4 = {}^1/_8 \times {}^1/_2 = {}^1/_{16}$ o.s. frv. Röðin skrifast þá þannig:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \cdots\cdots C \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

Þannig eru hægra megin tilgreind takmörkin, sem röðin er sönn fyrir innan, nefnilega þegar x er meira en -1, og minna en $+1$. Þegar svo er, kallast röðin *convergerandi* (samhöll); og þá nálgast hún sitt mið; sè þetta ekki, og x liggur ekki milli þessara takmarka, þá er röðin *divergens* (sundurhöll) og fjarlægist sitt mið. Setjum nú $x = {}^1/_2$, þá er

$$\frac{1}{1-{}^1/_2} = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + {}^1/_{32} + {}^1/_{64} + {}^1/_{128} + {}^1/_{256} + {}^1/_{512} + {}^1/_{1024} \cdots\cdots$$

Að kvótarnir (eða brotin) hèr fara alt af minkandi, er auðsætt af því, að *divisores* fara alt af vaxandi. Til að finna summu þessarar endalausu *series*, þarf ekki annað en reikna út stærðina, sem er vinstra megin við jafnaðarmerkið $\frac{1}{1-{}^1/_2}$ og þó ekki

sè búið að kenna brot, vitum vèr þó af daglegum vana, að tveir helmingar eru í heilum, og þegar hálfur er dreginn frá heilum ($1 - \frac{1}{2}$), verður hálfur eptir. þessi mismunur skrifast $\frac{1}{2}$. þegar nú deilandinn 1 fyrir ofan strykið skal deilast með þessum $\frac{1}{2}$, þá vitum vèr, að $\frac{1}{2}$ er tvisvar innifalinn í 1; og að kvótinn er því $= 2$, sem þá er summa hinnar óendanlegu raðar. Sama kemur fram, þó vèr reiknum hægra megin eptir (68. *A*), og látum brotið koma strax í öðrum lið, þannig:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

Vèr getum þannig skrifað deilinn $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ undir hvern lið í röðinni sem vèr viljum, og þá sýnir hann (deilirinn), að sá liður þarf að tvöfaldast, ef summan skal fyllast, því að deila með $\frac{1}{2}$ er sama sem að tvöfalda (tveir helmingar liggja í heilum hverjum), t. d. taki eg liðinn $\frac{1}{1024}$ og skrifa þar undir $\frac{1}{2}$ þannig: $\frac{\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}$, þá væri það sama sem: $\frac{1}{1024} \times 2$ eða $\frac{2}{1024}$; og ef þessi $\frac{2}{1024}$ hefði staðið þar í röðinni sem $\frac{1}{1034}$ nú stendur, þá hefði summan verið full eptir (68. *A*), því brotið væri þá meðreiknað. Röðina vantar því til fyllingar summunnar í hverjum lið eins mikið og sá liður er stór til, sem tekinn er. þegar því liðurinn $\frac{1}{1024}$ er tekinn, þá vantar í summuna $\frac{1}{1024}$. þar nú liðirnir í þessari röð alt af helmingast, og alt af er jafnmikið eptir við það, er seinast var tekið, þá er auðsætt, að maður tekur alt af helminginn af því sem eptir er; en með þessu móti nær maður aldrei summunni, þó hann væri að þessu til eilífðar, en nálgast þó summuna eilíflega; það er því auðsèð, að 2 er einmitt sú tala, sem röðin miðar á, og kemst aldrei fram yfir; til að ná 2 þarf eilífð, en til að komast lengra þarf meir en eilífð. Sú óendanlega *series* nær eilífðinni, því hún liggur í henni alt af, og hefir eilíflega í henni legið, þó sá sem reiknar nái þangað aldrei með áframhaldi. það sem er eilíft er eilíflega eilíft og þarf ekki að ná eilífðinni, en það sem ekki er eilíft getur aldrei orðið eilíft. En hvernig mundu liðirnir verða á að líta, eða vera á að líta, ef þangað yrði komizt? Svarast: þeir sí og æ minkandi liðir eru þar óendanlega litlir, er táknast $\frac{1}{\infty}$ nefnilega $x^{\infty} = \frac{1}{\infty}$ og er það sama sem 0, svo röðin verður

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots\cdots + x^\infty \text{ eða hèr}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 \cdots\cdots + (\tfrac{1}{2})^\infty \text{ eða}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdots\cdots + \frac{1}{\infty}$$

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdots\cdots + \frac{1}{\infty}$$

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdots\cdots + 0$$

71. Taki menn með sama hætti röðina B (68) og setji inn í hana $x = \frac{1}{2}$, þá verður

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{256} - \tfrac{1}{512} + \tfrac{1}{1024} \cdots\cdots \pm (\tfrac{1}{2})^{n-1} \mp \frac{(\frac{1}{2})^n}{1+\frac{1}{2}},$$

þá sýnir stærðin vinstra megin við jafnaðarmerkið, að röðin miðar á $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. Deilirinn í þessari stærð inniheldur 3 helminga, en deilandi 2 helminga; þetta boðar þá, að 2 eigi að deilast með 3, svo að röðin miði á $\frac{2}{3}$, sem vèr einnig lesum 2 þriðjunga. Þar á móti hvað brotið í röðinni áhrærir, nefnilega $\mp \frac{(\frac{1}{2})^n}{1+\frac{1}{2}}$, þá er *divisor* þess 3 helmingar eða $\frac{3}{2}$; deilirinn 2 í þessari *division* boðar, að stærðin $(\frac{1}{2})^n$ eigi að tvöfaldast eins og í röðinni A, en deilandinn 3 segir, að þetta skuli aptur deilast með 3. Hèr að auk verður nú að aðgæta merkin $-$ og $+$ og hvort n sè ójöfn tala eða jöfn. Reynum vèr nú þessa reglu á 2^um^ lið raðarinnar, sem er $\frac{1}{2}$; og tvöföldum hann fyrst, eins og vèr gjörðum í röðinni A, og þá fáum vèr 1; en nú eigum vèr að deila þessum 1 með 3, og fáum $\frac{1}{3}$ eða þriðjung. Nú er eptir að aðgæta n, hvort það sè jöfn tala eða ójöfn. Það er teljari brotsins í röðinni B, sem heitir n, og brotið settum vèr nú í annan lið, þar sem *exponentinn* við x er 1, svo n er ójöfn tala, og á því að lesa efra merki brotsins sem er $-$, og sá $\frac{1}{3}$, sem vèr erum búnir að finna, á því að frádragast, svo öll *series* verður

$$1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3},$$

rètt eins og stóð vinstra megin við jafnaðarmerkið og sem vèr áðan fundum.

72. Það er auðsèð af (70), að talnaröðin C ekki getur verið sönn á takmörkunum sjálfum $x = 1$ og $x = -1$, vegna þess

röðin verður þá öldungis ekki samhöll, og brotinu má því engan veginn sleppa. Sè $x = 1$, þá er stærðin bæði vinstra og hægramegin við jafnaðarmerkið $= \infty$, því

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \cdots\cdots + 1 + \frac{1^{\infty}}{1-1}$$

sama sem

$$1/0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \cdots\cdots + 1 + \frac{1^{\infty}}{0}$$

ellegar

$$1/0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \cdots\cdots + 1 + 1/0$$

Að deilingin vinstra megin $1/0$ boði óendanlegt, sèst af því, að hversu opt sem 0 er *subtraherað* frá 1, er sá 1 alt af óskertur eptir (57,3), svo að sú afnumning endar aldrei. Sömuleiðis gefur samlagningin hægra megin óendanlegt, því hversu opt sem tekinn er 1 og 1 og 1 o. s. frv. þá er þó ætíð $1/0$ ótekið og óskert eptir; og þetta er sama sem vinstra megin ($= \infty$); því alt af er eins og ekkert væri tekið, og samlagningin hefir engan enda hægra megin eins og afnumningin vinstra megin hafði engan enda. Nú kynni einhver að segja: hèr er $1/0$ (óendanlegt) vinstra megin, og $1/0$ líka hægra megin, og þar að auki *series:* $1 + 1 + 1 + 1 \cdots\cdot$ o. s. frv., hvernig getur það jafnt verið? Svarast: Hið óendanlega getur ekki tekið á móti neinum viðbæti, því þá er komið út fyrir stærðarinnar takmörk; en stærðarinnar takmörk eru 0 og ∞. (Eilífðin er t. d. ekki lengri, þó við hana bætist nokkrir dagar eða ár; eilífðin, sem liggur fyrir Alexander stóra, er ekki lengri en eilífðin, sem liggur fyrir Napóleoni mikla, þó þessi komi til sögunnar seinna en hinn). Þó að nú *series* $1 + 1 + 1 + 1$ o. s. frv. yrði eða væri óendanleg, og menn þess vegna kynni hugsa, að tvent óendanlegt væri hægra megin, en ekki nema eitt vinstra megin, þá verður samt við sama, að tvent óendanlegt er ekki meira en eitt óendanlegt, eða $\infty + \infty = \infty$ eins og $0 + 0 = 0$. Stærðarinnar eiginlegleiki að vaxa og minka er hèr farinn (samber inng. 2.). Þetta verður þó ljósara af eptirfylgjanda.

73. Ekki einungis $1/0$ er $= \infty$, heldur er sèrhver endanleg stærð deild með $0 = \infty$; þannig er

$$\frac{a}{0} = \infty$$

því hversu opt sem 0 er dregið frá a, þá skerðist a ekki við

það, og er alt af jafnmikið eptir, svo sá afnumníngur verður óendanlegur (57,8).

1. Viðbót. Þessi kvóti $\frac{a}{0} = \infty$ er hvorki játandi nè neitandi, ellegar ef til vill bæði játandi og neitandi, vegna þess *divisor* 0 er það (35).

2. Viðbót. Kvótinn ∞ getur ekki stærri orðið, vegna þess að *divisor* 0 getur ekki minni orðið. Bæði 0 og ∞ eru því stærðarinnar takmörk. Núll er raunar engin stærð, heldur er það minna en allar stærðir; eins er ∞ engin stærð, heldur stærra en allar stærðir. Að 0 sè minna en nokkur stærð, á hèr að takast í annari merkingu heldur en (35) seinast, þar sem neitandi stærðirnar eru kallaðar minni en 0. Af (35) er það raunar auðsèð, að 0 verður að vera minna en neitandi stærðirnar eptir deilingarskoðun, þó það sè það ekki eptir frádragningarskoðun, þar það stendur í miðju milli tveggja óendanlegra raða, og neitandi stærðirnar eru raunar viðsnúnar stærðir reiknaðar frá þessari sömu miðju í gagnstæða átt við hinar játandi. Þar af sèst, að 0 eða miðjan sjálf er engin stærð, heldur útgangsdepill stærðanna, hafandi sjálfur enga stærð og ekkert merki $+$ eða $-$.

3. Viðbót. Núll minkar ekki við deilingu með endanlegum stærðum; því:

$$0/1 = 0;\ 0/2 = 0;\ 0/3 = 0;\ 0/4 = 0;\ \frac{0}{n} = 0.$$

4. Viðbót. Núll stækkar ekki við margföldun með endanlegum stærðum, því:

$$0 \,.\, 1 = 0;\ 0 \,.\, 2 = 0;\ 0 \,.\, 3 = 0;\ 0 \,.\, 4 = 0;\ 0 \,.\, n = 0.$$

Þetta leiðir af 3. viðbót, og því að deilir og kvóti margfaldaðir saman gefa *dividendus.*

$$0 \,.\, 0 = 0, \text{ því } 0 \,.\, 0 = 0 \,.\, (1 - 1) = 0 \,.\, 1 - 0 \,.\, 1 = 0 - 0 = 0.$$

Þetta leiðir einnig af því, að hversu mörg 0 sem *adderast* saman, gefa ætíð summuna 0, þannig:

$$0 + 0 + 0 + 0 \cdots\cdots\cdots = 0$$

Þar af leiðir

$$n \,.\, 0 = 0 \text{ og } -n \,.\, 0 = 0$$

$$\text{eða } 0 \,.\, n = 0 \text{ og } 0 \,.\, -n = 0 \,.$$

5. Viðbót. Núll deilt með núlli gefur óákvarðaðan kvóta, sem þess vegna verður að ákvarðast öðruvísi.

$$\begin{array}{rll}
1 & = 12^0 & \\
12 & = 12^1 & \\
144 & = 12^2 & \\
1728 & = 12^3 & -11)\,5159780352 \quad = 12^9 \\
20736 & = 12^4 & -469070941\tfrac{1}{11} = -\dfrac{12^9}{11} \\
248832 & = 12^5 & \\
2985984 & = 12^6 & \\
35831808 & = 12^7 & \\
429981696 & = 12^8 & \\
\hline
469070941 & = \textit{series}\ 12^0 \cdots\cdots\ 12^8 & \\
-469070941\tfrac{1}{11} & = \text{seinasti liður} & \\
\hline
-\tfrac{1}{11} & = \text{summu } \textit{seriei}\ 12^0 \cdots 12^8 \text{ og seinasta liðar.} &
\end{array}$$

Hèr er því jafnmikið báðum megin við jafnaðarmerkið. Sama hefði framkomið, hvað margir eða fáir liðir sem hefði verið teknir. Vèr viljum reyna að taka tvo, þá væri

$$\frac{1}{1-12} = \frac{1}{-11} = 1 + \frac{12}{-11}$$

$$\frac{-1}{11} = 1 - 1\tfrac{1}{11} \text{ það er } -\frac{1}{11} = -\frac{1}{11}$$

Hèr má sjá, að summa allra undangangandi liða í talnaröðinni $1 + 12 + 12^2 \cdots 12^8$ nemur það í burtu, sem seinasti liður inn $\frac{12^9}{-11}$ yfirgengur stærðina $\frac{1}{-11}$ sem er vinstra megin við jafnaðarmerkið, og að af þessu kemur jöfnuðurinn báðum megin. Þetta getum vèr og sèð af bókstafareikningnum af talnaröðinni A

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

Dragi menn hèr $\frac{1}{1-x}$ frá $\frac{x^n}{1-x}$, þá fæst $\frac{x^n-1}{1-x}$, sem er $= -\frac{x^n-1}{x-1}$ (því hèr hefir deilirinn fengið umsnúin merki, svo kvótinn fær nú $-$ í staðinn fyrir að hann hafði áður $+$). En þessi stærð er $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \cdots x^2 + x + 1$ eptir *formulunni* (64, *A*), þegar í henni er sett $a = 1$; þá er auðsætt að *negatifa* stærðin $-\frac{x^n-1}{x-1}$ sem liðurinn $\frac{x^n}{1-x}$ hefir fram yfir $\frac{1}{1-x}$ bætist upp aptur af talnaröðinni $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$. En þetta má þó enn reglulegar skoða þannig:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{1-x} \text{ drag frá}$$

$$0 = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}$$

En $\frac{x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{x^n-1}{1-x} = -\frac{x^n-1}{x-1}$, þess vegna

$$0 = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1} - \frac{x^n-1}{x-1}$$

En eptir (64, *A*) er

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \cdots + x + 1$$

$$0 = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n-1} - (x^{n-1} + x^{n-2} \cdots x + 1)$$

Hèr má sjá, að þegar búið er að taka $\frac{1}{1-x}$ burt, þá vinnur sig alt hitt upp og verður $= 0$.

Merk! Hèr þurfti að nota frádragningu $\frac{1}{1-x}$ frá $\frac{x^n}{1-x}$; en ekki er búið að skýra frá frádragningu brota. Þó má hæglega hjálpa sèr út af þessu, og það með tvennu móti. 1. Í (61) var sýnt, að brotið $^6/_{723}$ eigi að lesast 6 sjöhundruðustu tuttugustu og þriðju partar. Eins má hèr lesa $\frac{1}{1-x}$ sem væri 1 $(1-x)$ti partur, og $\frac{x^n}{1-x}$ sem væri x^n $(1-x)$tu partar. Nú má draga frá

x^n $(1-x)$tu partar
1 $(1-x)$ti partur

verður eptir x^n-1 $(1-x)$tu partar, það er $\frac{x^n-1}{1-x}$

2. Má skoða þessar stærðir sem tvær deilingar. Sè nú deilinum $(1-x)$ kastað burt úr $\frac{1}{1-x}$ og $\frac{x^n}{1-x}$, þá verða þær stærðir 1 og x^n og báðar $(1-x)$faldar við það, sem þær eiga að vera. Nú má draga 1 frá x^n, kemur mismunurinn $x^n - 1$. En þar *minuendus* og *subtrahendus* voru $(1-x)$faldir við það, sem þeir áttu að vera, þá verður og mismunurinn $x^n - 1$ að vera $(1-x)$ sinnum of stór; og það lagast með því að deila honum með $1-x$; kemur $\frac{x^n-1}{1-x}$.

2. Viðbót. Ef *divisor* er *secundi ordinis,* en *dividendus primi ordinis,* þá er

$$\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

En þar $\infty^2 = \infty \cdot \infty = \infty$, þá er og $\frac{\infty}{\infty} = 0$.
þessar viðbætur útvíkka (73, 9), þar sem

$\frac{\infty}{\infty}$ = óákvörðuðu *(indeterminato)*. Samber (73, 6) í seinasta dæmi. Að slíkar stéttir hins óendanlega *(ordines)* liggi fyrir utan stærðarinnar og reikninganna takmörk, má nærri geta.

75. Óendanlegt dregið frá óendanlegu gefur óákvarðaðan mismun, því

$$\frac{a-a}{0} = \frac{a}{0} - \frac{a}{0} \quad \ldots. \;(61)$$

$$\text{ɔ:}\ \frac{0}{0} = \infty - \infty$$

$$\text{En}\ \frac{0}{0} = \textit{indeterminato}\ (73,\ 5).$$

þess vegna $\infty - \infty$ *indeterminatum.*

þetta má einnig sanna af (73, 7), þar sem sýnt er, að sérhver viðbætir við óendanlegt er hverfandi stærð; þannig:

$$\begin{array}{l} \infty + a = \infty \\ \underline{\infty \qquad\; = \infty \text{ frádregið}} \\ \qquad a = \infty - \infty \end{array}$$

Hèr getur a verið hvort heldur vera skal 0 eða sèrhver endanleg stærð, en það getur líka verið óendanlegt, því

$$\begin{array}{l} \infty + \infty = \infty \\ \underline{\infty \qquad\quad = \infty \text{ frádregið}} \\ \qquad \infty = \infty - \infty \end{array}$$

það sem í undanfarandi töluliðum (72) (73) (74) (75) sýnast kann í fyrsta áliti undarlegt, hverfur alveg, þegar aðgætt er, að ∞ er ekki nein ákvörðuð stærð, þar það liggur fyrir utan stærðarinnar takmörk. þegar tvent eða fleira óendanlegt kemur fyrir sem *addendi* eða *factores,* þá sýnist eins og summan eða *productið* muni verða stærra af þeim fleiri óendanlegu en af einu, en það verður samt ekki, vegna þess óendanlegt getur aldrei, þegar það er skoðað í einu lagi sem summa, orðið stærra en óendanlegt.

þess vegna þegar stærð er margfölduð með eiginlegu broti, þá verður *productið* minna en ef hún væri margfölduð með 1. Með öðrum orðum: Stærð minkar, þegar hún er marfölduð með eiginlegu broti. Með sama hætti má sýna, að $^{10}/_{11}$ minkar, þegar það er margfaldað með $^{7}/_{9}$.

Í bókstöfum væri þetta svo:

Sè $m < n$, þá er

$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} < \frac{k}{l} \times \frac{n}{n}$; því hægra megin er margfaldað með stærra.

$\frac{k}{l} \times \frac{n}{n} = \frac{k}{l} \times 1$, því $\frac{n}{n} = 1$

þá $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} < \frac{k}{l} \times 1$.

70. *Thorema.* Talnaraðirnar A og B (68) verða merkilegri, þegar í þeim x er minna en 1, því þá má sleppa brotinu með því móti að gjöra þær óendanlegar; því þá minkar afgangurinn óendanlega, og x^n verður $= 0$, þegar liðafjöldinn n er óendanlega stór, er táknast $n = \infty$, því þegar brotin hefjast upp í veldi, þá minka þau, vegna þess þau margfaldast með sjálfum sèr og þess vegna með broti. Þannig verður $x^2 < x$, $x^3 < x^2$, $x^4 < x^3$ o. s. frv. (69, 1), t. d. ef $x = {}^1/_2$ (ɔ: hálfur), þá er $x^2 = {}^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$ (ɔ: einn fjórði partur), $x^3 = {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4 \times {}^1/_2 = {}^1/_8$; $x^4 = {}^1/_8 \times {}^1/_2 = {}^1/_{16}$ o.s. frv. Röðin skrifast þá þannig:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots\ldots C \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

Þannig eru hægra megin tilgreind takmörkin, sem röðin er sönn fyrir innan, nefnilega þegar x er meira en -1, og minna en $+1$. Þegar svo er, kallast röðin *convergerandi* (samhöll); og þá nálgast hún sitt mið; sè þetta ekki, og x liggur ekki milli þessara takmarka, þá er röðin *divergens* (sundurhöll) og fjarlægist sitt mið. Setjum nú $x = {}^1/_2$, þá er

$$\frac{1}{1-{}^1/_2} = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + {}^1/_{32} + {}^1/_{64} + {}^1/_{128} + {}^1/_{256} + {}^1/_{512} + {}^1/_{1024} \ldots$$

Að kvótarnir (eða brotin) hèr fara alt af minkandi, er auðsætt af því, að *divisores* fara alt af vaxandi. Til að finna summu þessarar endalausu *series*, þarf ekki annað en reikna út stærðina, sem er vinstra megin við jafnaðarmerkið $\frac{1}{1-{}^1/_2}$ og þó ekki

β. 5 sinnum 16 er 80, og 11 β þar til er 91 . 7 í 91 er 13 sinnum, gengur ekkert af. þeir 13 β skrifast.

2. Dæmi:

486) 7058 ℔ 12 lóð 2 *kvintin* gjörist þannig:
14 ℔ 16 lóð 3 *kvintin*

486) 7058 ℔ (14 ℔	486) 8140 (16 lóð	486) 1458 (3 *kvint.*
486 .	486 .	1458
2198	3280	0
1944	2916	
254 ℔	364 lóð	
1 ℔ = 32 lóð	1 lóð = 4 *kvint.*	
508	1456	
762 .	+ 2 *kvint.*	
+ 12 lóð	1458 *kvint.*	
8140 lóð.		

Bæði þessi dæmi má bera saman við margföldunardæmin (56), því þau eru hin sömu sem þar.

þessi hjáritning er nokkuð löng, af því deilirinn er fremur stór, og af því að hver einasti stafur er hèr til greinilegleika skrifaður. þetta hefði hèr mátt spara sèr, með því að leysa deilinn upp í gjörendur, því

$$486 = 9 . 9 . 2 . 3 = 9 . 9 . 6,$$

nota síðan gjörendurna, sem útheimta þrjár lèttar deilingar, þannig:

9) 7058 ℔ 12 lóð 2 *kvint.*
9) 784 8 2
6) 87 4 2
14 ℔ 16 lóð 3 *kvint.*

Hèr þarf enga hjáritningu að skrifa, en ekki verður þessu ætíð viðkomið, því sumar tölur verða ekki leystar upp í gjörendur. Með þessum gjöröndum má í huganum deila með minni margföldunartöflunni. það er og hægt af gjöröndunum 9 . 9 . 2 . 3 að setja saman 9 . 2, svo verði 9 . 18 . 3 = 18 . 9 . 3, svona:

18) 7058 ℔ 12 lóð 2 *kvint.*
9) 392 4 1
3) 43 18 1
14 ℔ 16 lóð 3 *kvint.*

Hèr er fyrsta deilingin gjörð með stærri margföldunartöflunni.

Geti gjörendurnir ekki orðið svo litlir, að deila megi með margföldunartöflunum, þá er ekki nema til tafar að dreifa *divisor*.

Brot (Fractio).

78. Það er í (61) útskýrt, hvernig brot framkoma af deilingu, og hvað þau sè. Brot er nefnilega einn eða fleiri af einingarinnar jafnstóru pörtum.

Brot er þess vegna ritað með tveimur tölum, sem heita nefnari (*denominator*), sem segir, í hvað marga jafnstóra parta einingunni er skipt; og er hann ritaður fyrir neðan þverstryk. Hin talan heitir teljari (*numerator*) sem telur, hvað margir af þeim jafnstóru pörtum þá umtalast sèr í lagi, t. d.

$$^5/_7 = 5 \text{ sjöundu partar}$$

Einingunni er hèr skipt í 7 jafna parta, og þar af fá partarnir heitið sjöundu partar, og talan 7 heitir því nefnari, að hún gefur pörtunum nafn. Þar á móti heitir hèr talan 5 teljari, af því hún telur fram 5 af þessum sjöundu pörtum.

Nú er þá brotið

$$^5/_7 = {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7$$

nefnilega: $^1/_7$ heitir einn sjöundi partur, og hèr eru 5 af þeim framtaldir eða tilgreindir, og gjöra þeir til samans 5 sjöundu parta eða $^5/_7$.

Viðbót. Af þessu leiðir, að brot getur skoðazt sem tveir gjörendur margfaldaðir saman; sá eini þeirra er brotsins teljari, og hinn annar er brot, er hefir 1 fyrir teljara og fyrra brotsins nefnara fyrir nefnara, þannig:

$$^5/_7 = 5 \,.\, {}^1/_7 = {}^1/_7 \,.\, 5$$

Yfir höfuð verður

$$\frac{a}{b} = a \,.\, \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \,.\, a$$

79. Það er heimilt að nota deilingarskriptina $\frac{a}{b}$ (ɔ: a deilt með b) fyrir brotskript (ɔ: a b^{tu} partar), því það kemur fyrir eitt, hvort a er deilt með b, eða teknir eru a slíkir b^{tu} partar einingarinnar, því:

$$a = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \cdots\cdots\cdots \; (a \text{ liðir})$$

Hèr er a leyst upp í sínar a einingar.

Nú skal deila báðum megin við jafnaðarmerkið með b, verða þá kvótarnir jafnir eptir (76, 1). Vinstra megin má kunngjöra deilinguna með því að skrifa b undir a eptir (57). En hægra megin er *polynomium* með a liðum, eins mörgum sem eining-

arnar eru margar í deilanda. þessu *polynomio* má því deila lið fyrir lið eptir (61); þannig:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+1+1+1+1 \cdots\cdot (a \text{ liðir})}{b}$$

$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdots\cdot (a \text{ liðir}) = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$= a\ b^{\text{tu}} \text{ partar.}$$

þess vegna er a deilt með b sama sem a faldur b^{ti} partur einingarinnar. Í stuttu máli: deila má a með b þannig að taka b^{ta} partinn úr hverri einingu í a, og safna þeim saman.

Viðbót. Nokkur brot hafa á voru máli sèrstök heiti, nefnil.:

$^1/_2$ = hálfur eða helmingur
$^1/_3$ = þriðjungur eða þriðji partur
$^1/_4$ = fjórðungur eða fjórði partur
$^1/_5$ = fimtungur
$^1/_6$ = sjöttungur
$^1/_8$ = áttungur
$^1/_{12}$ = tólftungur.

80. Orðþýðingar. Sannarlegt brot (*fractio genuina*) er það, sem hefir teljarann minna en nefnarann. Launbrot (*fractio spuria*) sem hefir teljarann jafnstóran eða stærra en nefnarann. Blandin tala (*numerus mixtus*) kallast sú tala, sem er samsett af heilli tölu og broti, svo sem $7^5/_{12}$, það er 7 heilir og 5 tólftu partar eða 7 heilir og 5 tólftungar.

Athugi. Hèr af koma tvö verkefni: að gjöra launbrot að blandinnni tölu, og að gjöra blandna tölu að launbroti. Í því síðara innibinzt einnig að gjöra heila tölu að launbroti.

81. Verkefni. Að gjöra launbrot að blandinni tölu. Deil teljara með nefnara, eptir (61); kvótinn sýnir, hvað margir heilir verða, og afgangurinn (ef nokkur er) verður teljari brotsins, en *divisor* þess nefnari. En verði enginn afgangur, þá er launbrotið einungis heil tala. þess háttar launbrot kalla sumir óeiginlegt brot.

Dæmi: $^{96}/_{14} = 6^{12}/_{14}$. Nefnarinn sýnir, að 14 ganga í hverja einingu, en 14 er 6 sinnum innifalið í 96, þess vegna verða í $^{96}/_{14}$ heilar 6 einingar, því 6 sinnum 14 er 84, og þegar 84 er dregið frá 96, verða 12 afgangs, sem einnig skulu deilast með 14: og það verður einungis með því að taka 14da part úr hverri

einingu afgangsins 12, koma þá 12 fjórtándu partar í staðinn fyrir 12 heilar einingar; verður því kvótinn:

6 heilir og 12 fjórtándu partar,

sem skrifast: $6^{12}/_{14}$, sem er sú blandna tala, er eptir var leitað. Það má líka skoða þetta þannig:

$^{14}/_{14}$, $^{28}/_{14}$, $^{42}/_{14}$, $^{56}/_{14}$, $^{70}/_{14}$, $^{84}/_{14}$

eru 1, 2, 3, 4, 5, 6 einingar heilar,

fleiri heilar fást ekki, heldur

$^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}+^1/_{14}$

sem eru 12 fjórtándu partar; til samans $6^{12}/_{14}$.

Viðbót. Af þessu sèst, að þegar teljari launbrotsins er jafn nefnara sínum, svo sem hèr $^{14}/_{14}$, þá eru allir partar einingarinnar framtaldir, og ekki fleiri; launbrotið er þá $=$ 1 heilum. Sè teljarinn í launbrotinu tvöfaldur við nefnara sinn, svo sem hèr $^{28}/_{14}$, þá eru tvöfalt svo margir partar framtaldir við þá, sem fylla eininguna, og er þá brotið $^{28}/_{14} = 2$ heilum o. s. frv.

82. Verkefni. Að gjöra heila tölu eða blandna að launbroti.

Úrlausn. Sè einungis heil tala gefin, þá margfalda hana með þeirri tölu, sem þú vilt að verði nefnari launbrotsins, og skrifa þann nefnara undir framkvæmið. En sè sú gefna tala blandin, þá margfalda það, sem heilt er þar í, með nefnara brotsins, og legg teljara brotsins þar við, fæst þá teljari launbrotsins. Rita loksins nefnara brotsins undir þann teljara, er þá launbrotið fundið.

Dæmi. Vilji eg gjöra 7 að launbroti með nefnaranum 6, þá segi eg 6 sinnum 7 er 42, verður þá launbrotið $^{42}/_6$. En vilji eg gjöra $7^4/_5$ að launbroti, þá segi eg: 5 sinnum 7 er 35 og 4 til er 39, þá er launbrotið $^{39}/_5$. Í fyrra dæminu er hver eining í 7 deild í 6 parta eða $^6/_6$; og þegar einingarnar eru 7, þá er það $^{42}/_6 = 7$. En í síðara dæminu er hver eining í 7 deild í 5 parta, er þá 5 sinnum 7 $=$ 35, þess vegna

$$\begin{array}{rrl} & 7 = & 35 \text{ fimtungar} \\ & ^4/_5 = & \underline{4 \text{ fimtungar}} \\ \text{til samans} & 7^4/_5 = & 39 \text{ fimtungar} = {}^{39}/_5. \end{array}$$

Í seinna dæminu hefði verið óhentugt að gjöra 7 að sjöttungum, eins og eg gjörði í fyrra dæminu, því þeir hefði ekki orðið samkynja fimtungunum í brotinu $^4/_5$ og þess vegna ekki getað lagzt saman við þá.

arnar eru margar í deilanda. Þessu *polynomio* má því c
fyrir lið eptir (61); þannig:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1 \cdots\cdot (a \text{ liðir})}{b}$$

$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdots\cdot (a \text{ liðir}) = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$= a\ b^{\text{tu}}$$

Þess vegna er a deilt með b sama sem a faldur
einingarinnar. Í stuttu máli: deila má a með b þann
b^{ta} partinn úr hverri einingu í a, og safna þeim sama

Viðbót. Nokkur brot hafa á voru máli sèrstök heil

$^1/_2$ = hálfur eða helmingur
$^1/_3$ = þriðjungur eða þriðji partur
$^1/_4$ = fjórðungur eða fjórði partur
$^1/_5$ = fimtungur
$^1/_6$ = sjöttungur
$^1/_8$ = áttungur
$^1/_{12}$ = tólftungur.

80. Orðþýðingar. Sannarlegt brot (*fractio ge*
sem hefir teljarann minna en nefnarann. Launbrot (
sem hefir teljarann jafnstóran eða stærra en nefn
in tala (*numerus mixtus*) kallast sú tala, sem er s
tölu og broti, svo sem $7^5/_{12}$, það er 7 heilir og
eða 7 heilir og 5 tólftungar.

Athugi. Hèr af koma tvö verkefni: að gjöra la
innni tölu, og að gjöra blandna tölu að launbrot
innibinzt einnig að gjöra heila tölu að launbroti.

81. Verkefni. Að gjöra launbrot að blan
teljara með nefnara, eptir (61); kvótinn sýnir, h
verða, og afgangurinn (ef nokkur er) verður t
divisor þess nefnari. En verði enginn afga
brotið einungis heil tala. Þess háttar launb
eiginlegt brot.

Dæmi: $^{96}/_{14} = 6^{12}/_{14}$. [illegible] sýnir, að
einingu, en 14 er 6 si[illegible] 96,
$^{96}/_{14}$ heilar 6 einingar [illegible] er
dregið frá 96, verð[illegible] nni
14: og það ver[illegible] taka

, 0, og 4.

4
. 1067
1.1851

. þristöfuðu stučla, sem
37, þá er það deilileiks
sem áður er sýnt með 11 í
.u má einnig reyna að deila
og verður þá eins stóra talan
. þarf síður við, þar lèttari deilileiks

legar með 2, og kallast ójafnar eða oddatölur (*numeri impares*). (þær voru nefndar í (36)). Dæmi: 72038 er deilileg með 2, en ekki 72037.

2. Með 3 má deila öllum þeim tölum, er þversumma (svo kallast tölustafanna summa) þeirra er deilileg með 3, t. d. 6780351; þar er þversumman 30, en 3 ganga upp í 30; þess vegna einnig í 6780351.

3. Með 4 má deila öllum þeim tölum, sem 4 ganga upp í tveimur seinustu tölustöfunum lesnum sem ein tala væri, svo sem 6780352, því þar 4 ganga upp í 52 (nl. 4 í 52 er 13 sinnum), þá ganga þeir og svo upp í allri tölunni.

4. Með 5 má deila öllum þeim tölum, er seinasti stafur er 5 eða 0, svo sem 6785 eða 6780.

5. Með 6 má deila öllum þeim tölum, sem deililegar eru með 2 og 3, báðum sèr í lagi, t. d. 678035112. Hèr er seinasti stafur 2 og þversumman 33.

6. Með 8 má deila öllum þeim tölum, er þrír seinustu stafirnir eru deililegir með 8, þegar þeir eru lesnir sem ein tala væri. Þá er talan, sem áðan var nefnd, 6780352 deilileg með 8, þar 8 ganga upp í 352.

7. Deilileikseinkunnin með 9 er: ef 9 ganga upp í þversummunni, þá ganga 9 upp í sjálfri tölunni. t. d. 30856797. Þversumman er 45, en 9 í 45 er 5 sinnum og ekkert afgangs.

8. Með 10 ef talan endar með 0, einu eða fleirum.

9. Með 11. Skipt tölunni í stuðla frá hægri hendi til vinstri með tveimur stöfum í hverjum, en í seinasta stuðli vinstra megin má vel verða 1 tölustafur. Verði þá þversumma stuðlanna (ekki stafanna) deilileg með 11, þá er sú fyrirlagða tala það líka, t. d. 2234067; sker hana svo: 2|23|40|67; þá $2 + 23 + 40 + 67 = 132$; 11 í 132 er 12 sinnum og ekkert umfram. Eins ganga 11 upp í 2234067, og eru þar í 203097 sinnum. Með fleiru móti má hafa deilileiks einkunn með 11, t. d. tak 1ta staf tölunnar hægra megin, svo 3ja 5ta 7da 9da og svo framvegis, legg þá saman, rita eða hugfest summuna. Legg síðan saman 2an 4da 6ta 8da 10da og svo framvegis, legg þá saman, og drag frá fyrri summunni; gangi þá 11 upp í mismuninum, þá er talan deilileg með 11, t. d. 2234067; gjör: $7 + 0 + 3 + 2 = 12$ og $6 + 4 + 2 = 12$; þá $12 - 12 = 0$, og $0 : 11 = 0$

og ekkert afgangs. Líka má segja $7 - 6 = 1$; $1 + 0 = 1$; $1 - 4 = -3$; $-3 + 3 = 0$; $0 + 2 = 2$; $2 - 2 = 0$ og loksins $0 : 11 = 0$ og ekkert umfram.

10. Með 12. Þær tölur eru deililegar með 12, sem eru deililegar með 3 og 4, hverri fyrir sig.

11. Með tölunum 7, 11, og 13, hverri fyrir sig, eða með þeirra *produktum* 7 . 11, eða 11 . 13, eða 7 . 13, eða 7 . 11 . 13 = 1001. Deil tölunni í stuðla frá hægri til vinstri með þremur stöfum í hverjum; drag summu stuðlanna í jöfnu sætunum frá summu þeirra í ójöfnu sætunum, og deil mismuninum með 7, 11, eða 13, eða með fleirum eða öllum þeim, þá verður eptir því stóra talan deilileg með hinum sömu, ef upp gengur, en ekki með hinum, er ekki upp gengur. Viljirðu afganginn vita, þegar stóru tölunni er deilt, þá er hann hinn sami sem þegar afgöngunum er deilt. En verði afgangurinn *negatif*, má draga hann frá 1001, ellegar leggja 1001 við summu stuðlanna í ójöfnu sætunum, ef sèst, að hún er minni. t. d. ef ransaka skal 2234067, þá sundra hana svo:

$$\begin{array}{lr}
 & 2|234|067 \\
 & \underline{2} \\
 & 69 \\
\text{Þar } 234 > 69, \text{ þá lána eg } \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{1001} \\
 & 1070 \\
\text{dreg svo frá} & \underline{234} \\
\text{Afgangur} & 836
\end{array}$$

$$7)\overset{3}{836} \qquad 11)\overset{0}{836} \qquad 13)\overset{4}{836}$$
$$\overline{119} \qquad \overline{76} \qquad \overline{64}.$$

Afgangs 3, 0, og 4.

Einungis 11 ganga upp í tölunni

$$7)\,223406\overset{3}{7}. \qquad 11)\,223406\overset{0}{7} \qquad 13)\,223406\overset{4}{7}$$
$$\overline{319152} \qquad \overline{203097} \qquad \overline{171851}$$

12. Taki menn þversummu þessara þrístöfuðu stuðla, sem nú var umtalað, og deili henni með 37, þá er það deilileiks einkunn fyrir 37 með líkum hætti sem áður er sýnt með 11 í (86, 9). Þessari sömu þversummu má einnig reyna að deila með 3, 9, 27, 111, 333, 999, og verður þá eins stóra talan deilileg með þeim. En þessa þarf síður við, þar lèttari deilileiks

einkunnir eru til með 3 og 9, og þar 37 mæla 111, 333, og 999. Við sömu töluna má þannig aðfara:

```
    2|234|067
      234
        2
37) 303 (8
    296
      7
```

Hèr verður þá afgangur = 7, og alt eins verður það, þegar stóru tölunni skal deila með 37. Vilji menn nú breyta svo tölu þessari, að 37 gangi upp í henni, þá má það með ótalföldu móti; en beinast liggur við að svipta hana einingastafnum 7, en gefa henni 0 í staðinn, eða með því að draga 7 frá miðstuðlinum. Má og líka bæta 30 við einhvern af stuðlunum, til að auka við töluna því sem hana vantar í að vera deilileg með 37; því 37 = 7 + 30. Hèr vil eg leggja 30 við miðstuðulinn

```
    2|234|067
       30
    2|264|067   Sú umbreytta tala
      264
        2
37) 333 (9
    333
      0
```

Hèr sèst, að 37 gengur upp í stuðlaþversummunni 333, og þess vegna upp í 2264067, sem hægt er að reyna. Það er líka auðsèð, að 3, 9, 111, 333, en ekki 27 nè 999 ganga einnig upp í stuðlaþversummunni 333, og eins hver fyrir sig í 2264067.

13. Þegar minni tala gengur ekki upp í þeirri tölu, sem ransaka skal, þá þarf ekki að reyna neina tölu, sem er *multiplum* (fleirtekning) hinnar minni tölu, hvort hún gangi upp í stóru tölunni, t. d: ef 2 ganga ekki upp í *m*, þá ganga ekki 4, 6, 8 eða neinar stærri jafnar tölur upp í *m*. Eins ef 3 ganga ekki upp í *m*, þá ganga ekki 6, 9, 12 eða neitt 3*n* upp í *m*, hvað sem *n* hèr þýðir (58*).

87. Nokkur dæmi.

Brotið $^{12}/_{14}$, sem kom fyrir í (81).

$^{12}/_{14}$ $\begin{cases} \text{mælar teljara } 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12 \\ \text{mælar nefnara } 2,\ 7,\ 14 \end{cases}$

Sameiginlegur mælir (sammælir, *mensura communis*) einungis 2 og hið stytta brot $^{6}/_{7}$.

Brotið $^{21}/_{49}$ $\begin{cases} \text{mælar } 3,\ 7 \\ \text{mælir } \ 7 \end{cases}$

Sammælir 7, stytt brot $^{3}/_{7}$.

Brotið $^{96}/_{128}$ $\begin{cases} \text{mælar teljara } 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48,\ 96 \\ \text{mælar nefnara } 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128. \end{cases}$

Sammælar 2, 4, 8, 16, 32, fullstytt brot $^{3}/_{4}$.

Stytta má og smámsaman þannig:

$$^{96}/_{128}\underbrace{|}_{2}{}^{48}/_{64}\underbrace{|}_{2}{}^{24}/_{32}\underbrace{|}_{2}{}^{12}/_{16}\underbrace{|}_{2}{}^{6}/_{8}\underbrace{|}_{2}{}^{3}/_{4}.$$

Brotið $^{44}/_{77}$ $\begin{cases} \text{mælar teljara } 2,\ 4,\ 11 \\ \text{mælar nefnara } \ 7,\ 11 \end{cases}$

Sammælir 11, stytt brot $^{4}/_{7}$.

Brotið $^{732}/_{916}$ mælist með 4 eptir (86, 3) $^{732}/_{916}\underbrace{|}_{4}{}^{183}/_{229}$.

Brotið $^{1000}/_{7500}$, má sníða jafnmörg 0 af teljara og nefnara (62) þannig $\frac{10|00}{75|00} = {}^{10}/_{75} = {}^{2}/_{15}$, samber (86, 5).

Brotið $^{143117}/_{915289}$ mælist af 13 eptir (86, 11).

88. Þegar tölur brotsins eru nokkuð stórar, er eptirfylgjandi aðferð betri til að finna beinlínis stærsta sammæli, ef hann er nokkur til. Sú stærri talan deilist með hinni minni, og síðan aptur í hvert sinn deilirinn með afganginum. Þessu er áframhaldið, unz afgangur verður $= 0$, er þá hinn seinasti *divisor* sá stærsti sammælir hinna gefnu talna. Verði seinasti afgangur $=$ 1, þá er það merki til, að tölurnar hafi engan sammæli (nema 1).

Sönnun þessarar aðferðar geymist.

Dæmi. Tölurnar sè 1075 og 1591

```
1075) 1591 (1
      1075
      ----
       516) 1075 (2
            1032
            ----
              43) 516 (12
                  43
                  --
                   86
                   86
                   --
                    0
```

Hèr er sá seinasti *divisor* = 43 stærsti sammælir. Þá $^{1075}/_{43}$ = 25 og $^{1591}/_{43}$ = 37. Þess vegna $^{1075}/_{1591}$ = $^{25}/_{37}$.

89. Samdeilandi (ɔ: sameiginlegur deilandi, *dividuus communis, multiplum commune*) er sú tala, sem fleiri tölur eru mælar til, svo sem 210 er samdeilandi talnanna 5, 6, 7, af því hún mælist af þeim. 5 í 210 er 42 sinnum; 6 í 210 er 35 sinnum; og 7 í 210 er 30 sinnum. Meðal samdeilandanna er hinn minsti samdeilandi (*dividuus communis minimus*) opt merkilegastur og hægastur í meðferðinni, og hefir eiginlegleika, sem aðrir samdeilendur ekki hafa.

90. Að finna minsta samdeilanda fleiri talna.

a. skrifa tölurnar í röð.

b. Aðgæt, hvort nokkur eða nokkrar af tölunum ganga upp í öðrum þeirra, og ef svo er, stryka þær út, sem uppganga í öðrum.

c. Hafi þá nokkrar af þeim óútstrykuðu einhvern sammæli, þá deil þeim með honum, þó sem minstum í einu, en rita hinar aðrar ódeildar meðal kvótanna í aðra röð.

d. Gæt að, hvort nokkrar í þessari röð ganga upp í öðrum, og útstryka (eins og í *b.*).

e. Far með hinar óútstrykuðu eptir *c.*

f. Hald sama áfram, unz engin gengur upp í annari og enginn er sammælir framar.

g. Margfalda saman alla deilana og alla ódeildu kvótana og niðurfærðu tölurnar í eitt *product.* Þetta er sá minsti samdeilandi hinna gefnu talna.

Dæmi:

Finna skal minsta samdeilanda talnanna
2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 18

Gjör svo: ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~8~~, 10, 15, 16, 18
5) ~~2~~, ~~3~~, 16, 18
2) 8, 9

5 . 2 . 8 . 9 = 720 = minsti samdeilandi.

91. Samlagning brotinna talna og blandinna. Fyrst leggja menn saman brotin, til þess, að ef nokkur heil tala kann að verða úr þeim, hún geti þá lagzt við heilu tölurnar. Þá er fyrst

um brotin að segja; að þau hljóta að vera samnefnd, (*ejusdem denominationis*) það er: þau hljóta að hafa sama nefnara) því annars eru þau ekki samkynja (14, 2) og geta ekkí saman lagzt að svo stöddu. Sè nú brotin samnefnd, þá er ekki annað við þau að gjöra, en að leggja saman teljara þeirra, því teljararnir eru tölur þeirra, en nefnararnir mega ekki álítast annað en sem nöfn eða heiti þeirra hluta, er skulu samanleggjast. Samber (78) (79). Verði summan launbrot, þá gjöra menn það að blandinni tölu, skrifa brotið í summuna, en leggja heilu töluna, sem í blöndnu tölunni er, við heilu tölurnar, ef nokkrar eru.

Dæmi $^5/_8 + {}^7/_8 + {}^3/_8 = {}^{15}/_8 = 1^7/_8$

því 5 áttundu partar
7 áttundu partar
3 áttundu partar

15 áttundu partar $=$ 8 áttundu partar $+$ 7 áttundu partar
$=$ 1 heill $+$ 7 áttundu partar.

Samber (81).

þetta má og sanna af (61), þar summa kunngjörðra kvóta er sama sem *polynomium* deilt með þeim sameiginlega *divisor*. Brotin eru kunngjörðu kvótarnir, en summa teljaranna er *polynomium*, áður en því er deilt með *divisor*. (78) (79).

Eptir (61) er nefnilega

$$\frac{a+b+c+d+e}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n} + \frac{e}{n}$$

og þess vegna aptur á bak:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n} + \frac{e}{n} = \frac{a+b+c+d+c}{n}$$

Dæmi með blöndnum tölum:

$12^3/_8 + 15^5/_8 + {}^7/_8 + 2^1/_8 = 31.$

Hèr er summa teljaranna 16, summa brotanna $^{16}/_8 = 2$; þessir 2 lagðir við heilu tölurnar gefa 31.

92. Sè brotin ekki samnefnd, verður að útvega þeim sameiginlegan nefnara, samnefnara (*denominator communis*, á dönsku *Generalnævner*). þessi samnefnari verður að vera *multiplum* sèrhvers hinna gefnu nefnara, svo að þeir gangi upp í honum, því annars fengi menn brotna teljara. Hèr að auki er það bezt, til að komast hjá stórum tölum, að samnefnarinn sè sá minsti samdeilandi allra hinna gefnu nefnara. þegar búið er að finna

hann, verður að finna öllum brotunum nýjan teljara, þannig, að þeir nýju teljarar eigi við samnefnarann eptir eðli brotlengingarinnar (84), svo að hvert brot haldi sinni réttu stærð og gildi, þó tölur þess verði stærri. Þetta gjörist með því að deila samnefnaranum með þeim gefna nefnara hvers brots, og margfalda síðan hinn gefna teljara með kvótanum; þá fæst sá nýi teljari, sem á við hinn nýja nefnara, samnefnarann. En til þess að tölurnar verði sem minstar, útheimtist og svo, að brotin, sem samanleggjast eiga, hafi verið fullstytt, áður en menn fara að útvega þeim samnefnarann. Sè nú samnefnarinn, eða sá minsti samdeilandi allra nefnaranna, fundinn eptir (90) $= m$, og eitt af gefnu brotunum fullstytt $= \frac{a}{n}$; kvótinn, sem fram kemur þegar sá nýi nefnari m er deildur með þeim gamla n, er þá heil tala $=$ p eptir (89); þá verður hið nýja brot

$$= \frac{ap}{np} = \frac{a \,.\, \frac{m}{n}}{n \frac{m}{n}} = \frac{ap}{m}$$

Af $\frac{ap}{m} = \frac{ap}{np}$ sèst, að p er einnig sá sammælir teljara og nefnara nýja brotsins $\frac{ap}{m}$, er það ætti að styttast með eptir (84) (85), til þess að gamla (ɔ: hið gefna) brotið $\frac{a}{n}$ framkomi. Reglan hvernig finna skal nýja brotið liggur þá í $\frac{ap}{m}$, og segir, að með kvótanum p eigi nú að margfalda gamla teljarann a, til að finna hinn nýja teljara ap, er eigi við nýja nefnarann m. Sè nú brotin

$$\frac{a_1}{n_1}, \frac{a_2}{n_2}, \frac{a_3}{p_3}, \ldots\ldots\ldots \frac{a_t}{n_t}$$

þá verður

$$\frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_3}{n_3} \ldots\ldots\ldots \frac{a_t}{n_t} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 \cdots\cdot p_t a_t}{m}$$

Þetta rita menn venjulega og hægast þannig:

	$\overbrace{\qquad}^{m}$ Brotlengjararnir	Nýju teljararnir.
$\frac{a_1}{n_1}$	$p_1 \left(= \frac{m}{n_1}\right)$	$p_1 a_1$
$\frac{a_2}{n_2}$	$p_2 \left(= \frac{m}{n_2}\right)$	$p_2 a_2$
$\frac{a_3}{n_3}$	$p_3 \left(= \frac{m}{n_3}\right)$	$p_3 a_3$
$\vdots$		
$\frac{a_t}{n_t}$	$p_t \left(= \frac{m}{n_t}\right)$	$p_t a_t$

$$\frac{p_1 a_1 \cdots p_t a_t}{m}$$

Það sem hèr er í svigum skrifast ekki, og jafnvel ekki sá dálkur, sem þar er á milli strykanna. Brotanna fjöldi er t. Tölurnar $1, 2, 3 \cdots t$ heita *indices*.

Dæmi í tölum. Brotin sè $^{17}/_{27}$, $^{5}/_{96}$, $^{19}/_{36}$, $^{3}/_{64}$. Samnefnarinn m finst þannig:

4)	27	96	36	64
3)	27	24	9	16
	9	8	3	16

$4 \,.\, 3 = 12$; $12 \,.\, 9 = 208$; $108 \,.\, 16 = 1728 = m$.

Ellegar þannig:

16)	27	96	36	64
3)	27	6	36	4
3)	9		12	
	3		4	

$16 \,.\, 3 = 48$; $48 \,.\, 3 = 144$; $144 \,.\, 3 = 432$; $432 \,.\, 4 = 1728 = m$

	$\overbrace{\qquad}^{m\,=\,1728}$ Brotlengjararnir	Nýju teljararnir
$\frac{a_1}{n_1} = {}^{17}/_{27}$	$p_1 = 64$	$p_1 a_1 = 1088$
$\frac{a_2}{n_2} = {}^{5}/_{96}$	$p_2 = 18$	$p_2 a_2 = 90$
$\frac{a_3}{n_3} = {}^{19}/_{36}$	$p_3 = 48$	$p_3 a_3 = 912$
$\frac{a_t}{n_t} = {}^{3}/_{64}$	$p_4 = 27$	$p_4 a_4 = 81$

$$\frac{p_1 a_1 \cdots p_4 a_4}{m} = \frac{2171}{1728}$$

Þá er summa brotanna $= {}^{2171}/_{1728} = 1\,{}^{443}/_{1728}$.

Hvernig þetta er framkvæmt, er annars kunnugt af reikningsbókunum.

93. **Frádragning brotinna talna og blandinna.** Fyrst *subtrahera* menn brotin, og verða þau að vera samnefnd; og ef þau eru það, verður að draga *subtrahendusar* teljara frá *minuendusar* teljara, og skrifa nefnarann undir.

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \qquad (\alpha)$$

því að a n^{tu} partar — b n^{tu} partar $= (a - b)$ n^{tu} partar.

þetta sannast einnig af deilingu *polynomii* (61), því

$$\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$$

það sannast einnig með því að leggja saman frádraga og mismuninn, því summa þeirra á að vera = minkanda (25,2), þannig:

$$\frac{b}{n} + \frac{a-b}{n} = \frac{b + a - b}{n} = \frac{a}{n}$$

það sannast einnig af (78,1) með því að leysa brotin upp í tvo gjörendur

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = a \,.\, \frac{1}{n} - b \,.\, \frac{1}{n} = (a - b)\frac{1}{n} = \frac{a - b}{n} \text{ eptir (41) (40)}$$

þar a og b mega álítast sem *coefficientar*, en $\frac{1}{n}$ sem bókstafur væri.

Sè brotin ekki samnefnd, verður að útvega þeim samnefnara. Hafi nefnararnir engan sammæli, má gjöra brotin samnefnd með því að margfalda sèrhvers brots teljara og nefnara með hins brotsins nefnara þannig:

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{p} = \frac{ap}{np} - \frac{nb}{np} = \frac{ap - nb}{np} \qquad (\beta)$$

En hafi nefnararnir sammæli, verður bezt að hafa tölurnar sem minstar, og þess vegna nota reglurnar fyrir þeim minsta samdeilanda (90); hann veri m, þá er

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{p} = \frac{\frac{m}{n}\,a - \frac{m}{p}\,b}{m} \qquad (\gamma)$$

Dæmi: $^{5}/_{28}$ — $^{8}/_{49}$ = $^{11}/_{196}$. þessir nefnarar 28 og 49 hafa sammæli 7, og er þá bezt að útvega þeim samnefnara með því að nota sammælinn

$$7)\ \frac{28\quad 49}{4\quad 7} \qquad 7 \,.\, 4 \,.\, 7 = 196$$

þá samnefnarinn $= 7 \,.\, 4 = 28$; og $28 \,.\, 7 = 196$, sem er *m*. þá verður

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{p} = \frac{\frac{796}{28} \,.\, 5 - \frac{196}{49} \,.\, 6}{196} = \frac{7 \,.\, 5 - 4 \,.\, 6}{196}$$

$$\text{eða} = \frac{\frac{7 \,.\, 4 \,.\, 7}{4 \,.\, 7}\, 5 - \frac{7 \,.\, 4 \,.\, 7}{7 \,.\, 7}\, 6}{196} = \frac{7 \,.\, 5 - 4 \,.\, 6}{196}$$

$$= \frac{35 - 24}{196} = \frac{11}{196}$$

þetta framkvæmist svo:

$$\begin{array}{r|c|l}
 & \overbrace{196} & \\
{}^{5}/_{28} & 7 & 35 \\
{}^{6}/_{49} & 4 & \underline{24} \\
\hline
{}^{11}/_{196} & & 11
\end{array}$$

Brotlengjararnir eru hèr 7 og 4
en nýju teljararnir 35 og 24

94. Fleiri dæmi í tölum:

$17^{5}/_{6} - 12^{3}/_{4}$. þarf að gjörast samnefnt.

$$\begin{array}{r|l}
 & \overbrace{12} \\
17^{5}/_{6} & 10 \\
12^{3}/_{4} & 9 \\
\hline
5^{1}/_{12} & 1
\end{array}
\qquad 2)\ \frac{6,\ 4}{3\quad 2} \quad 2 \,.\, 3 \,.\, 2 = 12.$$

Hèr eru brotlengjararnir ekki skrifaðir.

$$\begin{array}{r}
697 \\
436^{1}/_{8} \\
\hline
260^{7}/_{8}
\end{array}$$

Hèr verður að taka 1 til láns af heilu tölunni 697; sá 1 er $= {}^{8}/_{8}$, svo ${}^{8}/_{8} - {}^{1}/_{8} = {}^{7}/_{8}$; loksins $696 - 436 = 260$; verður því mismunurinn $260^{7}/_{8}$.

þegar þannig ekkert brot er í *minuendus*, nægir að draga teljara brotsins frá nefnara sínum, $8 - 7 = 7$, og skrifa nefnarann undir.

$$\begin{array}{r|l}
 & \overbrace{24} \\
1728^{2}/_{3} & 16 \\
894^{7}/_{8} & 21 \\
\hline
833^{19}/_{24} & 19
\end{array}$$

$3 \,.\, 8 = 24$, Samnefnari.

Hèr verður og svo að taka 1 til láns, og láta hann hafa sama nefnara sem brotin. Hann er þá ${}^{24}/_{24}$; þá gjör $24 - 21 + 16 = 19$. Hvenær sem taka þarf til láns, og brotin eru orðin samnefnd, er bezt að draga *subtrahendusar* teljara frá samnefnaranum og leggja teljara *minuendusar* þar við, ef hann er nokkur til.

95. Margföldun brotinna talna og blandinna.

1. Að margfalda brot eða blandna tölu með heilli. Úrlausn. Margfalda teljarann í *multiplicandus* með *multiplicator*, og skrifa nefnarann undir, eða deil með honum, ef launbrot verður, og þú vilt gjöra það að sannarlegu broti. Margfalda síðan heilu töluna í blöndnu tölunni, og legg þar við hið heila, sem fèkst úr launbrotinu. Þessi úrlausn er bygð á því, að teljari brots er sú eiginlega tala þess, en nefnarinn einungis nafn hennar eða nýtekin eining (78). t. d. $^5/_7$ er sama sem 5 sjöundu partar. Eigi nú $^5/_7$ að margfaldast með 6, þá er eptir (45) talan 5 einn af þeim jafnstóru *addendis*, og þeirra fjöldi er 6, þá er summan eða *produktið* $= 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =$ 30 sjöundu partar $= {}^{30}/_7 = 4^2/_7$. Hefði nú *multiplicandus* verið blandin tala, svo sem $12^5/_7$, er ætti að margfaldast með 6; þá átti 12 að margfaldast með 6; 6 sinnum 12 er 72, og þar við leggjast 4, sem úr launbrotinu komu, svo *produktið* allt verður $76^2/_7$. Eins hefði mátt gjöra allan *multipcandus* að launbroti, og margfalda síðan, t. d. $12^5/_7 = {}^{89}/_7$; og 6 sinnum $^{89}/_7$ er $^{534}/_7 = 76^2/_7$. Eins má sanna þessa margföldunaraðferð af (78, 1), svo sem ef margfalda ætti $\frac{a}{b}$ með c, þá er

$$\frac{a}{b}\,.\,c = a\,.\,\frac{1}{b}\,.\,c = a\,.\,c\,.\,\frac{1}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Geti margfaldi gengið upp í nefnara margfaldanda, þá er önnur aðferð til, og hún gefur minni tölur, nefnilega: að deila nefnaranum með *multiplicator*, og láta teljarann þá óbreyttan, t. d.

$$^7/_{12} \times 3 = {}^7/_4 = 1^3/_4.$$

Hèr fáum vèr 7 fjórðu parta í staðinn fyrir 7 tólftu parta, og gefur það að skilja, að hèr er þreföldun ákomin, því fjórðu partarnir eru þrefalt svo stórir sem tólftu partarnir; er þá auðskilið, að teljarinn á að halda sèr, þegar svona er aðfarið. Eptir hinni aðferðinni hefði reikningurinn orðið svo:

$$^7/_{12} \times 3 = {}^{21}/_{12} = 1^9/_{12} = 1^3/_4.$$

2. Að margfalda með broti. Úrlausn. Margfalda með teljaranum og deil með nefnaranum

$$a\,.\,\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Því sè *multiplicandus* a og *multiplicator* b, þá er

$$\frac{b}{c} = b \,.\, \frac{1}{c}$$

og á þá eptir (47) að margfalda a með báðum þessum gjöröndum, og framkvæmið er þá kunngjört þannig:

$$a \times \frac{b}{c} = a \times b \,.\, \frac{1}{c} = ab \,.\, \frac{1}{c}$$

kemur svo fyrir eitt, hvort fyr er margfaldað með b eða $\frac{1}{c}$. Margfaldi jeg a með $\frac{1}{c}$, þarf að athuga hvað sú margföldun þýðir, að margfalda með $\frac{1}{c}$. *Multiplicator* kunngjörir, hvað margir sè samleggjendur (45). Hèr eru þá ekki margir samleggjendur, heldur einungis einn c^{ti} partur úr einum samleggjanda (78); það segir, að a skuli deilast í c jafnstóra parta, þess vegna

$$a \,.\, \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$$

þetta skal nú aptur margfalda með hinum öðrum *factor* b, eptir (95, 1), verður

$$a \,.\, \frac{1}{c} \,.\, b = \frac{a}{c} \,.\, b = \frac{ab}{c}$$

sem segir, að margfalda skuli með teljara og deila með nefnara. Sama kemur út, þó í kunngjörða framkvæminu $a \,.\, \frac{1}{c} \,.\, b$ fyrst væri margfaldað saman $a \,.\, b = ab$, og það aptur með $\frac{1}{c}$; því það gæfi eptir nýfundinni reglu $\frac{ab}{c}$

3. Að margfalda brot með broti. Úrlausn. Margfalda saman teljarana, kemur teljari framkvæmisins; margfalda saman nefnarana, kemur nefnari framkvæmisins. Sannast af (69), því brotin eru kunngjörðir kvótar eða deilingar, (79). Þess vegna

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$$

Þetta má einnig sanna þannig: Þar margföldun og deiling eru gagnstæðar reiknings athafnir, þá leiðir þar af, að ef $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ er margfaldað með ln, og síðan því framkvæmi aptur deilt með ln, þá hlýtur að framkoma $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ óumbreytt aptur þess vegna:

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{ln \,.\, \frac{k}{l} \times \frac{m}{n}}{l \,.\, n} = \frac{km}{ln}$$

Hèr eru tveir púnktar skrifaðir undir það, sem gengur upp hvað á móti öðru.

96. Dæmi í tölum og styttingar

$^7/_8 \,.\, ^3/_5 = {}^{21}/_{40}$ því $^{7 \cdot 3}/_{8 \cdot 5} = {}^{21}/_{40}$

$16^4/_5 \times {}^3/_{17} = {}^{84}/_5 \,.\, ^3/_{17} = {}^{252}/_{85} = 2^{82}/_{85}$

þetta má reikna með mörgu móti, t. d.

$16^4/_5 \times {}^3/_{17} = {}^4/_5 \,.\, ^3/_{17} + 16 \,.\, ^3/_{17}$

$= {}^{12}/_{85} + {}^{48}/_{17}$ (því $16 \,.\, ^3/_{17} = {}^{16}/_1 \,.\, ^3/_{17} = {}^{48}/_{17}$)

$= {}^{12}/_{85} + {}^{48}/_{17} \,.\, ^5/_5$ (til að gjöra brotin samnefnd)

$= {}^{12}/_{85} + {}^{240}/_{85} = {}^{252}/_{85} = 2^{82}/_{85}$.

Hèr sèst sá einfaldasti máti að gjöra heila tölu að launbroti, (samber 82) að skrifa 1 undir hana, svo sem hèr $16 = {}^{16}/_1$. Annars er skriptin í þessari margföldunaraðferð nokkuð löng, einkum af því $^{12}/_{85}$ er skrifað upp aptur og aptur. þetta má með þriðja hætti reikna þannig:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{16^4/_5 \times {}^3/_{17}} \\ \hline \multicolumn{2}{r}{85} \\ ^{12}/_{85} & 12 \\ 2^{14}/_{17} & 70 \\ \hline 2^{82}/_{85} & 82 \end{array}$$

þessir $^{12}/_{85}$ eru framkomnir af $^4/_5 \,.\, ^3/_{17}$; en $16 \,.\, ^3/_{17} = {}^3/_{17} \,.\, 16 = {}^{48}/_{17} = \frac{34 + 14}{17} = {}^{34}/_{17} + {}^{14}/_{17} = 2 + {}^{14}/_{17} = 2^{14}/_{17}$. því næst eru brotin gjörð samnefnd, og samanlögð.

Fjórði mátinn er að margfalda $16^4/_5$ með 3, og deila svo með 17 eptir (95, 2); en af því ekki er búið hèr að sýna deilingu blandinna talna með heilli tölu, verður það hèr fyrst að bíða. Fimti mátinn er að taka í part *multiplicator,* og það verður hèr líka að bíða.

$8 \,.\, ^7/_{12} = {}^8/_1 \,.\, ^7/_{12} = {}^{8 \cdot 7}/_{12} = {}^{2 \cdot 7}/_3 = {}^{14}/_3$.

Hèr má stytta teljara hins eina brots mót nefnara hins annars; nefnilega 8 móti 12, því 4 ganga upp í báðum. það má ef vill skrifast svona:

$$\overset{2}{8}/_1 \,.\, ^7/_{\underset{3}{12}} = {}^{14}/_3.$$

Eins má stytta

$$\frac{8 \,.\, 7}{12} = \frac{4 \,.\, 2 \,.\, 7}{4 \,.\, 3} = \frac{2 \,.\, 7}{3} = \frac{14}{3}$$

Eins má stytta eptir margfölduninni

$$^{8 \cdot 7}/_{12} = {}^{56}/_{12} \Big| \overset{4}{} {}^{14}/_3$$

$^8/_9 \,.\, ^{15}/_{16}$. Hèr má stytta á tvo vegu:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{1 \,.\, 5}{3 \,.\, 2} = \frac{5}{6}$$

ellegar ${}^{8.1}/_{3.3} \,.\, {}^{3.5}/_{8.2} = {}^{8.1.3.5}/_{3.3.8.2} = {}^{8.1.3.5}/_{8.3.3.2} = {}^{1.5}/_{3.2} = {}^{5}/_{6}$.

Þetta má með bókstöfum framsetja þannig:

$bc \,.\, \frac{a}{bd} = c \,.\, \frac{a}{d}$, þar er b sammælir heilu tölunnar og brotsins nefnara.

$\frac{ab}{cd} \,.\, \frac{cm}{ap} = \frac{b}{d} \,.\, \frac{m}{p}$, þar má stytta með a og c á víxl. Einnig $a \,.\, \frac{b}{ac} = \frac{b}{c}$ og loksins $\frac{a}{b} \,.\, \frac{b}{a} = 1$, er segir, að þegar brot sè margfaldað með sjálfu sèr umsnúnu, þá komi 1 út.

97. Að margfalda blandaðar tölur saman. Tölurnar mega gjörast að launbrotum, og þau síðan margfaldast saman eptir (95, 3), ellegar blönduðu tölurnar álítast sem *polynomia* og margfaldast eptir (53, 2). Dæmi:

$4^2/_7 \,.\, 5^1/_3 = {}^{30}/_7 \,.\, {}^{16}/_3 = {}^{3.10}/_7 \,.\, {}^{16}/_3 = {}^{10}/_7 \,.\, {}^{16}/_1 = {}^{160}/_7 = 22^6/_7$

ellegar:

$$\begin{array}{ll}
\underline{4^2/_7} & \times \; 5^1/_3 \\
 & \underbrace{21} \\
21^3/_7 & 9 \\
\underline{1^9/_{21}} & \underline{9} \\
22^{18}/_{21} & = 22^6/_7
\end{array}$$

Hèr má segja 5 sinnum $^2/_7$ er $^{10}/_7 = 1^3/_7$. Sá 1 heili geymist, en $^3/_7$ skrifast. 5 sinnum 4 er 20 og þar við legst 1 geymdur, kemur 21; er þá komið $21^3/_7$. Nú má gjöra $4^2/_7$ að $^{30}/_7$ og margfalda með $^1/_3$, kemur $^{30}/_{21} = 1^9/_{21}$; þetta lagt saman við $21^3/_7$ gefur $22^6/_7$. Fleiri aðferðir fást, þegar búið er að tala um deilingu blandinna talna.

Í bókstöfum geta blandaðar tölur þannig fyrirkomið.

$$\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(d + \frac{e}{f}\right) = \frac{ac+b}{c} \,.\, \frac{df+e}{f} = \frac{(ac+b)(df+e)}{cf}$$

$$= \frac{acdf + ace + bdf + be}{cf} \quad \text{ellegar}$$

$\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(d + \frac{e}{f}\right) = ad + \frac{ae}{f} + \frac{bd}{c} + \frac{be}{cf}$. Vilji menn setja þetta saman í eitt, má margfalda og deila ad með cf, ae með c og bd með f, og leggja saman, kemur $\frac{adcf}{cf} + \frac{aec}{cf} + \frac{bdf}{cf} + \frac{be}{cf}$ með því að margfalda hvern lið með nefnarastöfunum, sem vanta, svo liðirnir verði samnefndir; þá verður summan

$$\frac{acdf + ace + bdf + be}{cf}$$

Vilji eg heimfæra þetta upp á næst undanganganda talnadæmi þá er:

$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f, =$

$4,\ 2,\ 7,\ 5,\ 1,\ 3$

þá er og framkvæmið

$$= \frac{4\,.\,7\,.\,5\,.\,3 + 4\,.\,1\,.\,7 + 2\,.\,5\,.\,3 + 2\,.\,1}{7\,.\,3}$$

$$= \frac{420 + 28 + 30 + 2}{21} = \frac{480}{21} = 22^6/_7.$$

98. Deiling brota.

1. Að deila broti með heilli tölu. Deil teljara brotsins með heilu tölunni, og lát nefnarann óbreyttan; ellegar ef deilir gengur ekki upp í teljara deilanda, þá margfalda nefnara deilanda með deili, og lát þá teljarann óbreyttan, t. d. $^8/_9 : 4 = {^2/_9}$, því 8 níundu partar deildir með 4 er 2 níundu partar. Einnig má hafa hina aðferðina, að margfalda nefnarann með *divisor*, þannig: $^8/_{9.4} = {^8/_{36}} = {^2/_9}$; hèr er þá stytt brotið með 4. Að síðari aðferðin sè líka deiling skilst þannig: að þegar $^8/_9$ skal deilast með 4, og menn taka 8 þrítugustu og sjöttu parta í staðinn fyrir 8 níundu parta, þá verður stærðin 4 sinnum minni, vegna þess að hver þrítugasti og sjötti partur er 4 sinnum minni enn níundi parturinn. Báðar þessar aðferðir má og sanna með því, að margfalda hinn fengna kvóta með *divisor*, því þá á fram að koma deilandi eptir (58, 3), t. d. $\frac{ab}{c} : a = \frac{b}{c}$ því $a\,.\,\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$, er sannar þá fyrrri. $\frac{d}{e} : f = \frac{d}{ef}$, því $f\,.\,\frac{d}{ef} = \frac{df}{ef} = \frac{d}{e}$, sem var *dividendus*. Hèr var stytt með f.

2. Að deila blandinni tölu með heilli. Deil fyrst heilu tölunni í *dividendus* með *divisor*, og skrifa það heila, sem kemur út, í kvótann, en verði afgangur af heilu tölunni, þá tak hann saman við brotið, svo blandin tala verði. Gjör þessa blöndnu tölu að launbroti og deil því með *divisor*, eptir (98, 1). Dæmi: Að deila $43^7/_9 : 5$.

5) $43^7/_9$ — Hèr má kveða svo að orði: 5 í 43 er 8 sinnum.
$8^{34}/_{45}$ — Skrifa 8 í kvótann, ganga af 3, þess vegna $3^7/_9 = {^{34}/_9}$; þessu skal síðan deila með 5; en þar 5 ganga

ekki upp í 34, þá læt eg þá óbreytta, en margfalda 9 með 5, kemur 45, svo allur kvótinn verður $8^{34}/_{45}$. Sönnun:

$$\frac{43^7/_9}{5} = \frac{40 + 3^7/_9}{5} = 8 + \frac{3^7/_9}{5} = 8 + \frac{^{27}/_9 + {}^7/_9}{5} = 8 + \frac{^{34}/_9}{5}$$

$$= 8 + {}^{34}/_{45} = 8^{34}/_{45}.$$ Samber (82) og (98, 1).

3. Að deila með broti. Margfalda með því umsnúna broti:

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Því sè *divisor* margfaldaður með þessum kvóta, þá kemur *dividendus*, nefnilega:

$$\frac{b}{c} \times a \cdot \frac{c}{b} = \frac{b}{c} \cdot a \cdot \frac{c}{b} = a \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}$$

en $\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$ eptir (96)

seinast, þess vegna $\frac{b}{c} \cdot a \cdot \frac{c}{b} = a$, sem er *dividendus*. Þegar nefnilega er tekið framkvæmi deilis og kvóta, þá verður framkvæmi hinna öfugu brota $= 1$; svo að deilandi verður óbreyttur eptir, t. d. í tölum:

$$7 : {}^5/_6 = 7 \cdot {}^6/_5 = 8^2/_5.$$

Því $^5/_6 \cdot 7 \cdot {}^6/_5 = 7 \cdot {}^5/_6 \cdot {}^6/_5 = 7 \cdot 1 = 7$, því $^5/_6 \cdot {}^6/_5 = 1$. Hvað er nefnilega $^5/_6 \cdot {}^6/_5$? eða 6 fimtungar af 5 sjöttungum? Fyrst er að sjá, hvað 1 fimtungur af þeim 5 sjöttungum er. Hann er 1 sjöttungur. En svo er þá að taka 6 þessa sjöttunga, og það er 1 heill. Í þessu var $^6/_5$ látið vera margfaldi, en $^5/_6$ margfaldandi. Sama kemur fram á hinn veginn, ef $^5/_6$ er látið vera margfaldi, en $^6/_5$ margfaldandi. Hvað er 5 sjöttungar af 6 fimtungum? Svar: þar 1 sjöttungur af þeim 6 fimtungum er 1 fimtungur, þá má taka 5 þessa fimtunga og það er 1 heill. En svo vèr komum aptur til deilingarinnar, þá var hèr spurt, hversu opt eru $^5/_6$ innifaldir í 7 heilum? Það má skoðast sem sú spurning: Hversu opt er 5 ℔ innifalið í 7 ríkisdölum? Væri hèr spurt um 1 ℔, þá væri það 42 sinnum innifalið í 7 ríkisdölum, en 5 ℔ er þá 5 sinnum sjaldnar innifalið í þeim en 1 ℔; þess vegna eins og 42 : 5 er $8^2/_5$, svo er $^5/_6$ í $7 = 8^2/_5$ sinnum.

4. **Að deila með blandinni tölu.** Gjör deili að launbroti, og far síðan að sem fyr segir.

Dæmi: $834\frac{1}{6} : 6\frac{1}{4}$

$$834\tfrac{1}{6} : 6\tfrac{1}{4}\ (= {}^{25}/_{4})$$
$$\overline{\qquad\qquad (4 \qquad}$$
$$25)\ 3336{}^{2}/_{3}\ (133{}^{4}/_{25}$$
$$\underline{25}$$
$$83$$
$$\underline{75}$$
$$86$$
$$\underline{75}$$
$$11{}^{2}/_{3} = {}^{35}/_{3};\ {}^{35}/_{3} : 25 = {}^{35}/_{75} = {}^{7}/_{15};\ \text{þá}\ \frac{834{}^{1}/_{6}}{6{}^{1}/_{4}} = 133{}^{7}/_{15}.$$

Þess konar skript sem $\frac{834{}^{1}/_{6}}{6{}^{1}/_{4}}$ getur skoðazt sem brot og kallast þá brotabrot (*fractio fracta*), þegar nefnilega annaðhvort bæði teljari og nefnari, ellegar annar þeirra er brotin eða blandin tala; þeir geta einnig verið fleirliðaðir eða *polynomia*. En til að gjöra slík brot að einföldum brotum, er hægast að margfalda teljara og nefnara með samnefnara allra brotanna. Þannig má margfalda þessa brots teljara og nefnara með 12, sem er samdeilandi nefnaranna 6 og 4, þannig : $834{}^{1}/_{6} \,.\, 12 = 10010$, og $6{}^{1}/_{4} \,.\, 12 = 75$, svo einfalda brotið verður $= {}^{10010}/_{75}$; og ef það er gjört að blandinni tölu, verður það $= 133{}^{7}/_{15}$ eins og áður. Með sama hætti má finna:

$$\frac{a + \frac{b}{n} - \frac{c}{m}}{d + \frac{e}{n} + \frac{f}{p}} = \frac{amnp + bmp - cnp}{dmnp + emp + fmn}$$

Hèr er samnefnari brotanna $= mnp$, það er framkvæmi allra nefnaranna m, n, p; með honum margfaldast a, kemur $amnp$, svo $\frac{b}{n}$, kemur $\frac{bmnp}{n} = bmp$, svo $\frac{c}{m}$, kemur $\frac{cmnp}{m} = cnp$; þar næst d, kemur $dmnp$; síðan $\frac{e}{n}$, kemur $\frac{emnp}{n} = emp$; og loksins $\frac{f}{p}$, kemur $\frac{fmnp}{p} = fmn$.

99. Í (96) gátum vèr þess, að þá að svo stöddu gætum vèr ekki sýnt 4. mátann til að margfalda $16{}^{4}/_{5} \times {}^{8}/_{17}$, en nú viljum

vèr gjöra það, nefnilega að margfalda $16^4/_5$ með 3, og deila síðan með 17, þannig:

$$16^4/_5 \times 3$$
$$17)\overline{50^2/_5}$$
$$\overline{2^{82}/_{85}}$$

Hèr er 3svar $^4/_5 = {}^{12}/_5 = 2^2/_5$; skrifa $^2/_5$ í *productið*, en geym 2; 3svar 16 er 48, og 2 geymdir er 50, sem skrifast í *productið*, svo þar er komið $50^2/_5$. Nú byrjar deilingin með 17: 17 í 50 er 2svar; 2svar 17 er 34, dregið frá 50 (í huganum), er eptir 16 og með brotinu $16^2/_5 = {}^{82}/_5$. Þetta á nú líka að deilast með 17; en 17 gengur ekki upp í 82, verður því að margfalda nefnarann 5 með deili 17, kemur 85, svo að $16^4/_5 \times {}^8/_{17} = 2^{82}/_{85}$, eins og fundið er í (96).

100. Margföldun og deiling með broti lèttist opt með því að taka *multiplicator* í parta, eins og hinar *practisku* reikningsbækur kenna*. Sú aðferð er að sundra teljara *multiplicators* $\frac{p}{q}$ í samleggjendur, að verði

$$p = r_1 + r_2 + r_3 \cdots \left(\text{Tölurnar við neðra horn stafsins heita } \textit{Indices} \text{ (sætisvísar).}\right)$$

þannig að sá fyrsti samleggjandi r_1 gangi upp í nefnara brotsins q og sè $= \frac{1}{a_1}q$; hinn annar r_2 gangi upp í r_1 og sè $= \frac{1}{a_2}r_1 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2}q$; hinn þriðji samleggjandi $r_3 = \frac{1}{a_3}r_2 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \frac{1}{a_3} q$ o. s. frv. $r_n = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}q$, þá verður

$$\frac{p}{q} = \frac{r_1}{q} + \frac{r_2}{q} + \frac{r_3}{q} \cdots\cdots \frac{r_n}{q}$$

Með þessu *polynomio* margfaldast þá *multiplicandus* M (51); en þessar *multiplicationir* snúast allar í deilingar með stærðunum a_1, a_2, $a_3 \cdots a_n$ því

$$M \times \frac{r_1}{q} = \frac{r_1 M}{q} = \frac{\frac{1}{a_1}qM}{q} = \frac{1}{a_1}M, \text{ en } a_1 \text{ er 1. } \textit{divisor}.$$

$$M \times \frac{r_2}{q} = \frac{r_2 M}{q} = \frac{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2}qM}{q} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2}M \text{ og } a_2 \text{ sá 2. } \textit{divisor}.$$

*) t. d. Jóns Guðmundssonar lögfræðings, bls. 134, o. s. frv., og prestsins síra Sigurðar Sivertsens á Útskálum, bls. 72, o. s. frv.

$$M \times \frac{r_3}{q} = \frac{r_3 M}{q} = \frac{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} qM}{q} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} M$$

....

$$M \times \frac{r_n}{q} = \frac{r_n M}{q} = \frac{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n} qM}{q} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n} M$$

Aðal-*productið* verður þá

$$\frac{p}{q} M = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} \cdot \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}\right) M_1 \text{ ellegar}$$

$$= \frac{1}{a_1} M + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} M + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} M + 1 \cdots \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a^2} \cdots \frac{1}{a_n} M$$

eptir (51).

Þar teljarar brotanna í hverjum lið eru hèr $= 1$, þá snúast allar þessar margfaldanir í deilingar með kvótunum a. En þess vegna átti r_1 að ganga upp í nefnara aðalbrotsins q, að nefnarinn segir, hvað margir sè partar heildarinnar eptir (78). Heildin er hèr $\frac{q}{q}$; brotið, sem margfalda skal með, er $\frac{p}{q}$; sá partur þess, sem hèr er tekinn í fyrsta lið, er $\frac{r_1}{q}$. Hann á að styttast með teljara sínum r_1, svo teljari fyrsta liðar verði 1. Þess vegna þarf r_1 að vera sammælir sjálfs síns og nefnarans q. r_1 þarf því að ganga upp í q, eins og áður er sagt. Nú styttum vèr brotið:

$$\overbrace{\frac{r_1}{q} \Big| \frac{1}{a_1}}^{r_1}$$

Þannig er þá $\frac{r_1}{q}$ orðið að $\frac{1}{a_1}$. Nú komum vèr til hins annars liðar $\frac{r_2}{q}$ og viljum útvega því broti teljarann 1, eins og hinu fyrra. Vèr hljótum því að stytta brotið $\frac{r_2}{q}$ með sammælinum r_2

$$\overbrace{\frac{r_2}{q} \Big| \frac{1}{\left(\frac{q}{r_2}\right)}}^{r_2}$$

Vèr þurfum nú að sjá svo til, að $\frac{q}{r_2}$ verði ekki brot, eins og það sýnist hèr vera, heldur heil tala, þó í brotslíki sè (sem sumir kalla óeiginlegt brot). Þessu komum vèr til leiðar með því að velja r_2 þannig, að sú stærð gangi upp í r_1, þar vèr lètum áður r_1 ganga upp í q og vera $\frac{1}{a_1}q$ eða $\frac{q}{a_1}$; vèr setjum því $r_2 = \frac{1}{a_2}r_1$ $= \frac{r_1}{a_2} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a^2}q$, svo $\frac{q}{r_2}$ verður $= \frac{q}{a_1 \cdot a_2 q} = \frac{1}{a_1 a_2}$ og brotstyttingin verður:

$$\begin{array}{c|l} & \underbrace{r_2} \\ \hline r_2 & 1 \\ \hline q & a_1 a_2 \end{array}$$

Þannnig er þá annar liður í röðinni $\frac{p}{q}$

$$\frac{r_2}{q} = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2}$$

Með sama hætti verður sèrhver liður í röðinni $\frac{p}{q}$

$$\frac{r_m}{q} = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_m}$$

svo að $$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots\cdots \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

Hèr þýðir a_m sèrhvern *divisor*, *m*ta *divisor*, eða þó heldur seinasta *divisor* í liðnum. Þar á mót þýðir a_n seinasta *divisor* í allri röðinni.

101. Við þessa partatekning nota reikníngsmenn sèrlegan ritmáta, sem ekki er hafður annarsstaðar. Undir *multiplicator* $\frac{p}{q}$ skrifast nú röðin þannig:

$$\frac{p}{q}$$

r_1 $\frac{1}{a_1}$ þýðir: $\frac{r_1}{q}$ er $\frac{1}{a_1}$ úr $\frac{q}{q}$ eða heilum.

r_2 $\frac{1}{a_2}$ þýðir: $\frac{r_2}{q}$ er $\frac{1}{a_2}$ úr $\frac{r_1}{q}$ eða úr fyrsta lið.

r_3 $\frac{1}{a_3}$ þýðir: $\frac{r_3}{q}$ er $\frac{1}{a_3}$ úr $\frac{r_2}{q}$ eða úr öðrum lið.

r_n $\frac{1}{a_n}$ þýðir: $\frac{r_n}{q}$ er $\frac{1}{a_n}$ úr $\frac{r_{n-1}}{q}$ eða úr næsta lið á undan.

Dæmi. Hèr vil eg margfalda 54836 $\times$ $^{12358}/_{15015}$.

$$M = 54836 \quad \times \quad {}^{12358}/_{15015} = \frac{p}{q}$$

		$\underbrace{15015}$	Nýju teljararnir	
$\frac{1}{a_1} M = M_1 =$	$18278^2/_3$	5005	10010	$r_1 = (5005^1/_3 \frac{1}{a_1}$
$\frac{1}{a_2} M_1 = M_2 =$	$18278^2/_3$	5005	10010	$r_2 = (5005^1/_1 \frac{1}{a_2}$
$\frac{1}{a_3} M_2 = M_3 =$	$3655^{11}/_{15}$	1001	11011	$r_3 = (1001^1/_5 \frac{1}{a_3}$
$\frac{1}{a_4} M_3 = M_4 =$	$3655^{11}/_{15}$	1001	11011	$r_4 = (1001^1/_1 \frac{1}{a_4}$
$\frac{1}{a_5} M_4 = M_5 =$	$522^{26}/_{105}$	143	3718	$r_5 = (143^1/_7 \frac{1}{a_5}$
$\frac{1}{a_6} M_5 = M_6 =$	$522^{26}/_{105}$	143	3718	$r_6 = (143^1/_1 \frac{1}{a_6}$
$\frac{1}{a_7} M_6 = M_7 =$	$47^{551}/_{1155}$	13	7163	$r_7 = (13^1/_{11} \frac{1}{a_7}$
$\frac{1}{a_8} M_7 = M_8 =$	$47^{551}/_{1155}$	13	7163	$r_8 = (13^1/_1 \frac{1}{a_8}$
$\frac{1}{a_9} M_8 = M_9 =$	$47^{551}/_{1155}$	13	7163	$r_9 = (13^1/_1 \frac{1}{a_9}$
$\frac{1}{a_{10}} M_9 = M_{10} =$	$47^{551}/_{1155}$	13	7163	$r_{10} = (13^1/_1 \frac{1}{a_{10}}$
				$r_{11} = (1^1/_{13} \frac{1}{a_{11}}$
$\frac{1}{a_{11}} M_{10} = M_{11} =$	$3^{9791}/_{15015}$	1	9791	$7r_{11} = (7^7/_1 \frac{1}{a_{11}}$
$7M_{11} =$	$25^{8477}/_{15015}$	1	8477	
	$45132^{6808}/_{15015}$		96398	

Hèr má vara sig á skrifmáta þessarar aðferðar og álíta ekki tölurnar, sem hèr standa, r_m fyrir blandnar tölur, svo sem $5005^1/_3$, heldur þýðir það hèr, að 5005 sè $^1/_3$ úr einingunni eða áður teknum pörtum hennar, eins og segir upphaflega í þessum tölulið (101). Einungis heilu tölurnar eru r_m, en brotin, sem standa aptan við þær, eru $\frac{1}{a_m}$. Teljari *multiplicators* $p = 12358$ er hèr leystur upp í samleggjendur: $r_1 = 5005$, $r_2 = 5005$, $r^3 = 1001$ o. s. frv., verður þá

$$p = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots\cdots r_n \quad \text{eptir (100),}$$

en þessir samleggjendur verða allir að geta gengið upp í nefnaranum q og áður teknum pörtum teljarans. Sè nefnarinn lítill, geta menn hæglega fundið þær tölur, er hafa þessa tvo kosti til að bera. En sè nefnarinn stór tala, t. a. m. í þessu dæmi, má hafa þar til bragð eitt, nefnilega að leysa nefnarann upp í sína

gjörendur. Eptir deilileiks einkunnunum hinna minni talna (86) geta menn fundið mæla margra talna, og hvað nefnarann í þessu dæmi áhrærir, má nú þannig aðfara:

3) 15015 =	3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 1	*factorar* í	15015
5) 5005 =	5 . 7 . 11 . 13 . 1	*factorar* í	5005
7) 1001 =	7 . 11 . 13 . 1	*factorar* í	1001
11) 143 =	11 . 13 . 1	*factorar* í	143
13) 13	13 . 1	*factorar* í	13
1	1	*factor* í	1.

Hèr má þá fyrst nota fyrsta *factorinn,* sem er minstur, og verður af honum kvótinn mestur 5005. Eg læt þá a_1 vera 3, en $r_1 = 5005$, ɔ: *productið* af hinum. Nú get eg tekið aptur 5005 af teljaranum p fyrir r_2, og þá læt eg a_2 vera $= 1$, til minnis um að það sè hið sama sem áður. Nú má eg ekki taka 5005 optar af p, því það verður of mikið. Þegar eg nú vil skygnast eptir *factor,* sem bæði gengur upp í q og líka upp í þeim áður tekna 5005, þá hefi eg ekki um aðra að velja en þá, sem hèr standa hægra megin í annari línu, nefnilega 5, 7, 11, 13, því það eru *factorar* bæði í 15015 og líka í 5005, og vel eg þann minsta af þeim fyrir a_3, en *product* hinna *factoranna* fyrir hið næsta r, nefnilega 7 . 11 . 13, sem er 1001. Eg hefi þá fengið $r_3 = 1001$, sem ekki er of stórt, og a_3 læt eg vera 5. Nú get eg tekið 1001 aptur, læt eg það þá vera r_4, og þar eg nota það aptur, læt eg a_4 vera $= 1$. En þá vantar mig í teljarann p, til að fylla hann, 346, en *factorarnir* í 1001, sem eg hafði seinast, eru eptir því, sem eg nú þegar fann, 7 . 11 . 13. Eg vel þá 7 til að vera a_5, því það gengur upp í 7 . 11 . 13, og er þar í 11 . 13 sinnum; en 11 . 13 er 143, og þar það er ekki of stórt til að takast af 346, þá læt eg 143 vera r_5. Eg get nú tekið 143 af þeim 203, sem nú eru eptir, verða þá eptir 60. Þessir síðar teknu 143 verða þá mitt r_6; en a_6 verður $=$ 1, þar eg tók 143 aptur. *Factorarnir* í 143 voru 11 og 13, eins og vèr þegar sáum, og tek eg nú hinn minni, nefnilega 11, til að vera a_7, verður þá hinn *factorinn* 13 að vera r_7. Nú má raunar taka 13 fjórum sinnum af 60, en menn láta sèr nægja að taka það fyrst einu sinni, og a_7 verður þá 11. Svo geta menn gjört hvað þeir vilja, annaðhvort að þrefalda r_7 og skrifa

það *product* þar neðan við, og rita einu sinni $^3/_1$ í staðinn fyrir alla $\frac{1}{a_8}$ $\frac{1}{a_9}$ og $\frac{1}{a_{10}}$ og er sá vegur skemri ellegar eins og eg hefi hèr gjört, að margfalda ekki r_7, heldur leggja 13 þrisvar sinnum við og láta a_8, a_9 og a_{10} vera 1. Þegar þetta er búið, hvor vegurinn sem farinn er, þá eru engir mælar eptir nema 1, til að vinna upp þá 8, sem eptir verða, þegar teknir eru 13 fjórum sinnum af 60, verður því að nota mælinn 1, sem gengur upp í öllum heilum tölum. Þá láta menn hann gjarnast vera r einu sinni, og margfalda síðan með 7, til að fylla þá 8, sem eptir stóðu af teljaranum p.

Það sèst nú vinstra megin í útreikningi þessa dæmis, hvernig deilarnir a eru notaðir hver eptir annan til að deila *dividendus* M. Fyrst deilist M með deilinum a_1, og er það hið sama sem að margfalda M með $\frac{1}{a_1}$ og fæst kvótinn M_1 eða 1ti hlutinn af M. Þar næst deilist M_1 með a_2 ellegar margfaldast með $\frac{1}{a_2}$ og svo hvað af öðru, þangað til öll a eru búin. En hafi maður gengið margföldunar veg í r_m og a_m, sem er stundum skemri leiðin, þá verður líka á sömu stöðum eða sömu liðum að viðhafa margfaldanir á kvótunum. Eptir (100) var aðal-*productið* þannig ritað:

$$\frac{p}{q}M = \frac{1}{a_1}M + \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}M + \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_3}M \;\cdots\cdot$$

Til að gjöra þetta fyrirferðarminna, má setja:

fyrsta lið $\frac{1}{a_1}M = M_1$, sem er 1ti hlutinn af M,

annan lið $\frac{1}{a_2}M_1 = M_2$

þriðja lið $\frac{1}{a_3}M_2 = M_3$ og yfir höfuð:

$m$ta lið $\frac{1}{a_m}M_{m-1} = M_m$; þá verður aðal-*productið:*

$$\frac{p}{q}M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \cdots\cdot M_m \cdots\cdot M_n$$

Þessi skrifmáti er hèr notaður vinstra megin í dæminu, ellegar, sem er sama:

$$\frac{p}{q}M = \frac{1}{a_1}M + \frac{1}{a_2}M_1 + \frac{1}{a_3}M_2 + \frac{1}{a_4}M_3 \cdots\cdot \frac{1}{a_m}M_{m-1} + \frac{1}{a_{m+1}}M_m$$

Þetta er nú, þegar lengri vegurinn er farinn. Þar á mót, þegar

hinn skemri er farinn, þá hlaupa fleiri liðir saman í einn, svo liðirnir verða færri, af því þeir eru jafnir. Deilingin með a_m snýst þá í margföldun. Röðin, sem teljarinn p var sundraður í, var táknuð þannig:

$$p = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \cdots\cdots\cdots$$

Þegar nú í henni eptir h liði koma k liðir jafnir liðnum r_h, þá margfaldast liðurinn r_h með k, svo næsti liður r_{h+1} verður $= kr_h$; því við alla þessa k liði verða deilarnir:

$$a_{h+1} \quad a_{h+2} \quad a_{h+3} \cdots\cdots a_{h+k}$$

allir saman hver fyrir sig $= 1$, og brotin sjálf $= 1/1 = 1$. Í staðinn fyrir samlagninguna:

$$r_{h+1} + r_{h+2} + r_{h+3} \cdots\cdots + r_{h+k}$$

kemur þá margföldunin kr_h eptir (45).

Röðin verður þess vegna:

$$p = r_1 + r_2 + r_3 \cdots\cdots r_h + kr_h + r_{h+2} + r_{h+3} \cdots\cdots$$

og af þessari orsök verður hún k—1 lið styttri.

Í talnadæminu $54836 \times {}^{12358}/_{15015}$ hèr að framan koma eptir r_7 þrír liðir jafnir við r_7, nefnilega

$$r_8 \quad r_9 \text{ og } r_{10}$$

og það fyrir þá skuld að

$$a_8 \quad a_9 \text{ og } a_{10}$$

urðu hvert fyrir sig $= 1$ og þess vegna brotin

$$\frac{1}{a_8} \quad \frac{1}{a_9} \text{ og } \frac{1}{a_{10}}$$
$$= 1/1 \quad 1/1 \text{ og } 1/1$$
$$= 1 \quad 1 \text{ og } 1$$

og þar 1 breytir engu við margföldun, þá verða

$$r_8 \quad r_9 \quad r_{10}$$
$$= r_7 \quad r_7 \quad r_7$$

Hèr er $h = 7$ og $k = 3$, $r_h = r_7$, $= 13$, $kr_h = 3 \,.\, 13 = 39$, hið nýja $r_{h+2} =$ nýtt $r_9 = \frac{1}{13}r_7$, því sá næsti *divisor*, sem nú heitir a_9, er $= 13$, og með honum skal deila, ekki þeim næsta lið á undan, nefnilega $kr_h = r_8$, heldur þeim, sem þar er á undan, hinum einfalda $r_7 = 13$, verður þá $r_9 = 1$. Þegar búið er að taka $r_9 = 1$, þá er búið að taka 53 af teljaranum 60, sem eptir var orðinn af p, þegar r_7 skyldi takast. Það er

þá einungis 7 eptir óteknir, hvort sem heldur er af 60 ellegar af 12358, sem var p. En nú fást engir mælar framar úr nefnaranum q, eins og vèr sáum, þegar vèr leystum hann upp í sína *factora*. þeir voru 3, 5, 7, 11, 13, 1, og erum vèr búnir að nota þá alla nema 1, sem mælir allar heilar tölur. Vèr hljótum því að nota hann, og það 7 sinnum að nýju, til að fylla þessa 7, sem eptir eru af teljaranum. Hèr koma þá 7 liðir jafnir eptir r_9, og það jafnir r_9, líkt og nú þegar skeði. Hèr verður nú $h = 9$ og $k = 7$, og einkenni eg þetta k frá hinu fyrra með stryki þannig: k'. Í dæminu hèr að framan hafði eg þessa margföldunaraðferð, af því mèr var leitt að skrifa svo marga samleggjendur.

Til að glöggva þetta betur, reikna eg hèr aptur síðara hluta dæmisins með skemri aðferðinni og byrja á r_7. Nú er þá
$12358 - 5005 - 5005 - 1001 - 1001 - 143 - 143 = 60$.

Af p standa eptir 60

$\underbrace{15015}$ $\quad {}^{60}/_{15015} = {}^{4}/_{1001}$

$M_7 = \frac{1}{a_7} M_6 = {}^1/_{11} M_6 =$	$47\frac{551}{1155}$	13	$7163 (13\,{}^1/_{11}$	$r_7 = {}^1/_{11} r_6 = \frac{1}{a_7} r_6$
$M_8 = k M_7 = \quad 3 M_7 =$	$142\frac{166}{385}$	39	$6474 (39\,{}^3/_1$	$r_8 = \quad 3 r_7 = k r_7$
$M_9 = \frac{1}{a_9} M_7 = {}^1/_{13} M_7 =$	$3\frac{9791}{15015}$	1	$9791 \; (1\,{}^1/_{13}$	$r_9 = {}^1/_{13} r_7 = \frac{1}{a_9} r_7$
$M_{10} = k' M_9 = \quad 7 M_9 =$	$\underline{25\frac{1211}{2145}}$	7	$\underline{8477} \; (7\,{}^7/_1$	$r_{10} = \quad 7 r_9 = k' r_9$
	$219\frac{1875}{15015}$		31905	

Summa liðanna í aðal-*productinu* $\frac{p}{q} M$ niður að liðnum M_7 var orðin . . . . $= 44913\,{}^{4438}/_{15015}$, og þegar þar við bætist úr síðara hluta . . . $\underline{219\,{}^{1875}/_{15015}}$
verður summan aðalframkvæmið . . $45132\,{}^{6308}/_{15015}$.

102. Fleiri talnadæmi viljum vèr setja hèr til að skýra betur ýmsa eiginlegleika þessarar aðferðar, M getur verið brot eða blandin tala, einnig fleirkonar tölur. Vèr tökum t. d. ${}^3/_7 \times {}^5/_{12}$ það má gjöra á fleiri vegu svo sem:

${}^3/_7 \times {}^5/_{12}$ $\quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$-\,\underbrace{28}\,-$ $\quad 4 = 2 \cdot 2$
${}^1/_7 \;\; 4 \; (4\,{}^1/_3$
${}^1/_{28} \;\; \underline{1} \; (1\,{}^1/_4$
${}^5/_{28} \;\; 5$

Hèr er bezt að velja *factorinn* 3 fyrir a_1, því ef eg vel 2 til að vera a_1, þá verður *productið* af hinum tveimur $2 \cdot 3 = 6$, of

stórt til að vera r_1, þar teljarinn er einungis 5. þegar 3 er a_1, þá verður $r_1 = 4$; vantar þá í teljarann 5 einungis 1, sem er $^1/_4$ af 4, svo r_2 er $= 1$ og $a_2 = 4$. Með $a_1 = 3$ deili eg nú deilanda $^3/_7$, og fæ $^1/_7$. þessu deili eg aptur með $a_2 = 4$ og fæ $^1/_{28}$ eptir deilingareglunum (98). það gat maður einnig gjört að nota gjörandann eða mælinn 2 fyrir a_1 þannig:

$^3/_7$	$\times$	$^5/_{12}$
$\cancel{3}$		$\cancel{6}^1/_2$
$\cancel{14}$		$(3^1/_2$
$^3/_{28}$		$(1^1/_3$
$^1/_{28}$		$(1^1/_1$
$^1/_{28}$		
$^5/_{28}$		

Með þessu móti fæ eg kvóta 6, sem að sönnu er of stór í teljarann; en jeg stryka hann út, til minnis um að taka ekki inn í summuna það sem út af honum kemur. Samt deili eg *dividendo* $^3/_7$ með 2, og fæ $^3/_{14}$, og stryka það út sömuleiðis. því næst deili eg $^3/_{14}$ með síðara mælinum 2 og fæ eptir (98) $^3/_{28}$, en stryka það ekki út, af því það r, sem því a fylgir, er ekki of stórt í teljarann 5. Aptur deili eg $^3/_{28}$ með mælinum 3 og fæ $^1/_{28}$. Nú vantar mig enn nú 1 í 5, og tek 1 annað sinn og skrifa þar við $^1/_1$, og þá skrifa eg $^1/_{28}$ annað sinn. Loksins legg eg saman brotin $^3/_{28} + {}^1/_{28} + {}^1/_{28} = {}^5/_{28}$. Nú viljum vèr taka þetta enn öðruvísi og skipta um *multiplicator* og *multiplicandus* eptir (46) þannig:

$^5/_{12}$	$\times$	$^3/_7$
	$\underbrace{84}$	
$^5/_{84}$	5	$(1^1/_7$
$^5/_{42}$	10	$(2^2/_1$
$^5/_{28}$	$^{15}/_{84} = {}^5/_{28}$	

þar 7 hefir engan mæli nema 1, þá verður samt að nota hann, og ganga þá margföldunarveginn. Eg set því $r_1 = 1$. En það, sem þann eina vantar í teljarann, verður þá k. Eg deili þá $^5/_{12}$ með 7 og fæ $^5/_{84}$. þetta brot $^5/_{84}$ margfalda eg með $k = 2$ og fæ $^5/_{42}$. þessi brot $^5/_{84}$ og $^5/_{42}$ gjörast nú samnefnd og leggjast saman, fæst $^{15}/_{84}$, sem má stytta með 3, fæst þá $^5/_{28}$.

þegar tölurnar eru litlar, þá er það skemra en partatekningin að margfalda teljarana saman og nefnarana saman eptir (95).

Nú viljum vèr margfalda blandna tölu $314^3/_4$ með $^7/_{16}$.

$314^3/_4$	$\times$	$^7/_{16}$
	$\underbrace{64}$	
$78^{11}/_{16}$	44	$(4^1/_4$
$39^{11}/_{32}$	22	$(2^1/_2$
$19^{43}/_{64}$	43	$(1^1/_2$
$137^{45}/_{64}$	109	

$16 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$ eða
$4 \,.\, 2 \,.\, 2$

Hèr get eg tekið tvo fyrstu gjörendurna af 16 saman, nefnilega $2 \,.\, 2 = 4$ og látið þá vera a_1, þá verður r_1 *productið* af hinum öðrum. Eg get því verið viss um, að hinir *factorarnir* ganga upp í r_1, get eg þá

$$M \times \frac{r_3}{q} = \frac{r_3 M}{q} = \frac{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} qM}{q} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} M$$

....

$$M \times \frac{r_n}{q} = \frac{r_n M}{q} = \frac{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n} qM}{q} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n} M$$

Aðal-*productið* verður þá

$$\frac{p}{q} M = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} \cdot \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}\right) M_1 \text{ ellegar}$$

$$= \frac{1}{a_1} M + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} M + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} M + {}^1 \cdots \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a^2} \cdots \frac{1}{a_n} M$$

eptir (51).

þar teljarar brotanna í hverjum lið eru hèr $= 1$, þá snúast allar þessar margfaldanir í deilingar með kvótunum a. En þess vegna átti r_1 að ganga upp í nefnara aðalbrotsins q, að nefnarinn segir, hvað margir sè partar heildarinnar eptir (78). Heildin er hèr $\frac{q}{q}$; brotið, sem margfalda skal með, er $\frac{p}{q}$; sá partur þess, sem hèr er tekinn í fyrsta lið, er $\frac{r_1}{q}$. Hann á að styttast með teljara sínum r_1, svo teljari fyrsta liðar verði 1. þess vegna þarf r_1 að vera sammælir sjálfs síns og nefnarans q. r_1 þarf því að ganga upp í q, eins og áður er sagt. Nú styttum vèr brotið:

$$\overbrace{\frac{r_1}{q}}^{r_1} \Bigg| \frac{1}{a_1}$$

þannig er þá $\frac{r_1}{q}$ orðið að $\frac{1}{a_1}$. Nú komum vèr til hins annars liðar $\frac{r_2}{q}$ og viljum útvega því broti teljarann 1, eins og hinu fyrra. Vèr hljótum því að stytta brotið $\frac{r_2}{q}$ með sammælinum r_2

$$\overbrace{\frac{r_2}{q}}^{r_2} \Bigg| \frac{1}{\left(\frac{q}{r_2}\right)}$$

Vèr þurfum nú að sjá svo til, að $\frac{q}{r_2}$ verði ekki brot, eins og það sýnist hèr vera, heldur heil tala, þó í brotslíki sè (sem sumir kalla óeiginlegt brot). Þessu komum vèr til leiðar með því að velja r_2 þannig, að sú stærð gangi upp í r_1, þar vèr lètum áður r_1 ganga upp í q og vera $\frac{1}{a_1}q$ eða $\frac{q}{a_1}$; vèr setjum því $r_2 = \frac{1}{a_2}r_1$ $= \frac{r_1}{a_2} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a^2}q$, svo $\frac{q}{r_2}$ verður $= \frac{q}{a_1 \cdot a_2 q} = \frac{1}{a_1 a_2}$ og brotstyttingin verður:

$$\begin{array}{c|l} & \overset{r_2}{\smile} \\ \frac{r_2}{q} & \frac{1}{a_1 a_2} \end{array}$$

Þannnig er þá annar liður í röðinni $\frac{p}{q}$

$$\frac{r_2}{q} = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2}$$

Með sama hætti verður sèrhver liður í röðinni $\frac{p}{q}$

$$\frac{r_m}{q} = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_m}$$

svo að $\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots\cdots \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$

Hèr þýðir a_m sèrhvern *divisor, m*ta *divisor*, eða þó heldur seinasta *divisor* í liðnum. Þar á mót þýðir a_n seinasta *divisor* í allri röðinni.

101. Við þessa partatekning nota reikníngsmenn sèrlegan ritmáta, sem ekki er hafður annarsstaðar. Undir *multiplicator* $\frac{p}{q}$ skrifast nú röðin þannig:

$$\begin{array}{ll} & \frac{p}{q} \\ \hline r_1 & \frac{1}{a_1} \end{array}$$ þýðir: $\frac{r_1}{q}$ er $\frac{1}{a_1}$ úr $\frac{q}{q}$ eða heilum.

r_2 $\frac{1}{a_2}$ þýðir: $\frac{r_2}{q}$ er $\frac{1}{a_2}$ úr $\frac{r_1}{q}$ eða úr fyrsta lið.

r_3 $\frac{1}{a_3}$ þýðir: $\frac{r_3}{q}$ er $\frac{1}{a_3}$ úr $\frac{r_2}{q}$ eða úr öðrum lið.

r_n $\frac{1}{a_n}$ þýðir: $\frac{r_n}{q}$ er $\frac{1}{a_n}$ úr $\frac{r_{n-1}}{q}$ eða úr næsta lið á undan.

Dæmi. Hèr vil eg margfalda 54836 $\times$ $^{12358}/_{15015}$.

því umsnúna broti eptir (98, 3). Nú kann deilirinn vera annaðhvort sannarlegt brot, ellegar blandin tala. þessi blandna tala getur einnig verið launbrot, og ef hún er það ekki, verður hún að gjörast að launbroti, áður en deilinum er bylt. það er því ekki fyrir öðru ráð að gjöra, en að deilirinn sè annaðhvort sannarlegt brot ellegar launbrot. En hvort sem heldur er, verður deilirinn að byltast.

Nú er fyrst að hugleiða, hvernig fer, þegar sannarlega brotið byltist; þá verður teljarinn stærri en nefnarinn eptir byltinguna, svo þar úr verður launbrot og á *dividendus* að margfaldast með því. þetta launbrot gjörist nú helzt að blandinni tölu, og athöfnin verður nú margföldun, hvort sem launbrotið gjörist að blandinni tölu eða ekki. Er þá annaðhvort margfaldað eptir (97) ellegar eins og nú er sýnt í (102), í þessu seinasta dæmi.

Nú er í annan stað að hugleiða, hvernig fer, þegar launbrotið byltist; þá verður teljarinn minni en nefnarinn, og á þá *dividendus* að margfaldast með sannarlegu broti, og er það sýnt (92, 2) og í (102), vegna þess allt lendir við margföldun eptir byltinguna.

Nokkur eðli heilla talna.

103. Um summu, mismun og framkvæmi heilla talna gilda þessar lærdómsgreinir:

1. *Positif* tala n, sem mælir tvær eða fleiri heilar tölur na, nb, nc, $\cdots$, mælir einnig þeirra summu og mismun, þegar a, b, c eru heilar tölur, *positif* eða *negatif*. því
$na + nb + nc + \cdots = n(a + b + c + \cdots)$ eptir (50), því þá verður kvótinn við deilinguna $a + b + c \cdots$, sem er heil tala, þar a, b, c $\cdots$ eru heilar tölur.

2. Sè talan n mælir hinnar einu af tveimur tölum, en ekki hinnar annarar, þá er hún heldur ekki mælir þeirra summu eða mismunar; því $\frac{na + b}{n} = a + \frac{b}{n}$ getur ekki verið heil tala, ef $\frac{b}{n}$ er það ekki. Hèr eru tölurnar na og b; n gengur upp í na, en vèr gjörum ráð fyrir, að sú tala gangi ekki upp í b, og þá gengur hún ekki upp í $na + b$ eða $na - b$.

3. Sè talan n mælir annarar tölu a, þá er hún einnig mælir

hennar margfaldrar $= ma$, það er að skilja, ef hún er margfölduð með heilli tölu m, því ma er ekki annað en summa af m jafnstórum *addendis*, sem hver fyrir sig er $= a$; eða

$$ma = a + a + a + a \cdots\cdots,$$

svo þegar n gengur upp í einum þeirra, þá gengur n upp í þeim öllum, og summa kvótanna verður heil tala. Samber (103, 1)

4. Tala, sem gengur upp í hvorugri af tveimur öðrum tölum, getur gengið upp í þeirra summu, þó einungis með því móti að hún sè jöfn summu þeirra leifa; t. d. ef n gengur hvorki upp í a nè b, en leifarnar verða q og r, þegar þeim er deilt með n; þá verður

$$\begin{array}{l} a = hn + q \\ b = kn + r \\ \hline a + b = (h + k)\, n + (q + r) \end{array}$$

Kvótarnir eru h og k; hèr gengur n upp í $(h + k)\, n$ eptir (103, 3); en gangi n líka upp í $q + r$, þá gengur n einnig upp í $a + b$ eptir (103, 1), annars ekki.

En nú er eptir venjulegum deilingarhætti

$$\begin{array}{l} q < n \\ r < n \\ \hline q + r < 2n \end{array}$$

Skuli nú n ganga upp í $q + r$, sem er $< 2n$, þá verður $q + r$ að vera $= n$; því sá næsti heili kvóti fyrir neðan 2 er 1; svo $q + n$ verður að vera $= 1n$, þegar það skal vera $< 2n$. Það er: það verður að vera

$$q + r = n.$$

5. Tala, sem gengur upp í hvorugri af tveimur öðrum tölum, getur gengið upp í þeirra mismun, þó með því móti, að hún gangi upp í mismun þeirra leifa; sè nefnilega bókstafirnir með sömu þýðíngu sem hèr næst á undan, þá er

$$\begin{array}{l} a = hn + q \\ b = kn + r \\ \hline a - b = (h - k)\, n + (q - r)\ . \end{array}$$

Skuli nú n ganga upp í $a - b$, þá verður n að ganga upp í $q - r$, en þar bæði q og r er (optast) látið vera minna en n, nefnilega afgangurinn minni en *divisor*, þá verður $q - r$ (optast) minna en n, svo að n gengur ekki upp þar í, nema ef

$q - r = o$, eða $q = r$, það er: tala, sem gengur upp í hvorugri af tveimur öðrum tölum, gengur ekki upp í þeirra mismun, nema ef leifar þeirra eru jafnar.

Merk: þessar *formulur* eða líkingar

$$a = hn + q$$

og $$b = kn + r$$

í (103, 4, 5) eiga að skoðast sem *formulurnar* 8 og 9 í (58) eða (58, 8) og (58, 9), nefnilega a og b eru tveir *dividendi*, n er beggja þeirra *divisor*, h og k eru þeirra tveir kvótar, og q og r leifarnar, þegar a og b er deilt með n.

Dæmi í tölum upp á 4 og 5 í þessum tölulið (103), Tölurnar 18 og 70 eru eru ekki deililegar með 13, en leifar þeirra beggja eru 5, þegar þeim er deilt með 13, því 13 í 18 er einu sinni og ganga af 5. 13 í 70 er 5 sinnum, og ganga af einnig 5. Mismunur milli 18 og 70 er 52, og 13 ganga upp í honum, því 4 sinnum 13 er 52. Viljum vèr niðurskipa tölum þessum eptir þeim nú þegar framsettu *formulum*, þá er það svo:

$$\begin{array}{r}
70 = 5 \;.\; 13 + 5 \\
\underline{18 = 1 \;.\; 13 + 5} \\
52 = 4 \;.\; 13 + 0
\end{array}$$

Vilji einhver hafa líkt talnadæmi upp á samlagninguna, þá er:

$$\begin{array}{r}
70 = 5 \;.\; 13 + 5 \\
\underline{18 = 1 \;.\; 13 + 5} \\
88 = 6 \;.\; 13 + 10
\end{array}$$

13 ganga ekki upp í 88, summunni af 70 og 18, af því þeir eru meira en 10, sem er summa leifanna, þegar 70 og 18 er deilt með 13. þetta er samkvæmt hinni annari lærdómsgrein í þessum tölulið (103). 13 ganga upp í 6 . 13 = 78, en ekki upp í 10, þess vegna ganga 13 ekki upp í 88, sem er summa 78 og 10. þar á móti ganga 13 upp í 117, summunni af 69 og 48, þó ekki gangi 13 upp í 69 og 48, þannig:

$$\begin{array}{r}
69 = 5 \;.\; 13 + 4 \\
\underline{48 = 3 \;.\; 13 + 9} \\
117 = 8 \;.\; 13 + 13
\end{array}$$

því 13 eru jafnir summu leifanna 4 og 9, sem er 13 eptir 4ðu lærdómsgrein. þetta er samkvæmt 1tu lærdómsgreininni, því 13 ganga upp í 104, sem er 8 sinnum 13, og líka upp í sjálfu sèr 13, þá gengur 13 og svo upp í 117, sem er summan af 104 og 13.

104. Tölur, sem hafa sömu leifar, þegar þeim er deilt með sama *divisor,* kallast *congruentes* (samsvarandi), á latínu *numeri congrui. Divisorinn* kallast þá *modulus* (kvarði). Slíkt samband eða ásigkomulag talnanna sín á milli kallast *congruentia* (samsvaran) og táknast þannig:

$$a \equiv b \ (mod.\ n),$$

a og b eru heilar tölur, annaðhvort *positifar* eða *negatifar,* en *modulus* er ætíð *positif.* Tölurnar a og b eru hvor annarar *residuum* (leif) eptir *modulus* n. Þannig er í talnadæminu (103, 5)

$$18 \equiv 70 \ (mod.\ 13).$$

En þessar tölur hafa óteljandi *residua,* bæði *positif* og *negatif,* sem öll finnast með því að leggja *modulus* við eða draga hann frá þessum *residuis.* Þannig finnast með frádragningu

$$70 \equiv 57 \equiv 44 \equiv 31 \equiv 18 \equiv 5 \equiv -8 \equiv -21 \equiv -34 \ (mod.\ 13).$$

Af þessum tölum heita 5 og — 8 *residua minima* (minstu leifar), og 5, sem ekki yfirgengur í töluverði þann hálfa *modulus, residuum absolute minimum* (hin allraminnsta leif). Lærdómurinn um *congruentiurnar* er eptir hinn nafnfræga tölu- og mælispeking Gauss.

Vèr sögðum nýlega, að a og b væri hvor annarar leif, þetta kemur fram, þegar vèr tökum þann kvóta, sem ekki gefur minstu leifina, svo sem í þessari *congruentiu*

$$18 \equiv 70 \ (mod.\ 13).$$

13) 18 (— 4	13) 70 (4	13) 70 (5	13) 57 (4	13) 44 (3
—52	52	65	52	39
+	18	5	5	5
70				

13) 31 (2	13) 5 (0	13) — 8 (0	13) — 8 (— 1	13) 18 (2
26	0	0	— 13	26
5	5	—8	+	—
			5	— 8

13) 18 (3	13) 18 (4
39	52
—	—
—21	—34.

105. Af röð n talna, sem koma næst hver eptir aðra í hinni náttúrlegu talningar röð (3)

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ \cdots\cdots\ a+n-1$$

er ætíð ein, en engar fleiri, sem er $\equiv A$ (*mod. n*). þegar *A* er eptir geðþekkni gefin tala.

því þegar deilt er tölunum þannig eptir röð með sama *divisor*, og yfir enga er hlaupið, þá vaxa leifarnar alt af um 1, ellegar þær verða $= o$; þetta gengur í umferðum þannig, að sömu leifarnar koma óaflátanlega aptur og aptur (eins og vikudagarnir) hversu lengi sem haldið er áfram að deila þeim komandi tölum. En liðirnir í umferð hverri verða eins margir sem einingarnar í *modulus*, því hann er *divisor*. Og loksins: hvaða tala sem tiltekin er, þá fær hún einhverja af þessum leifum eða *o*, en engar fleiri (eins og enginn dagur kemur sá, að hann ekki heiti eins og einhver einn af vikudögunum, þar *modulus* dagatalsins er 7.

þeir, sem kunna fingrarím, geta skilið þá setningu, að öll ártöl Krists, sem hafa sama gyllinital, eru *congruent* eptir *mod.* 19. þannig er

$$1788 \equiv 1845 \ (mod.\ 19).$$

Vèr viljum reyna *residua minima* þessara ára.

```
19) 1788 (94        19) 1845 (97
    171                 171
    ---                 ---
     78                 135
     76                 133
     --                 ---
      2                   2
```

Á þessum árum er annars gyllinitalið 3. þegar Kristur fæddist, var ártalið 0. Reynum þess árs *residuum*.

```
19) 0 (0
    0
    -
    0
```

Tunglöldina hafa menn látið byrja við Kristsfæðingu, svo gyllinitalið væri þá 1. þar af leiðir regluna til að finna gyllinital, að leggja 1 við ártal Krists og deila svo með 19. Köllum vèr ártal Krists *A*, þá má finna gyllinitalið með þessari *congruentiu:*

$$A + 1 \equiv \text{gyllinital} \ (mod.\ 19).$$

```
     1788               1845
        1                  1
     ----               ----
19) 1789 (94        19) 1846 (97
    171                 171
    ---                 ---
     79                 136
     76                 133
     --                 ---
      3                   3
```

Með þessu móti gefur *residuum* hið rètta gyllinital.

2. dæmi. Í 17 talna röð, sem byrjar á 123, er einn liður *congruent* með 1861 eptir *modulus* 17; hver er hann? Eg deili 1861 með 17, fæ kvótann 109 og afganginn 8; þá er

$$1861 \equiv 8 \ (mod.\ 17),$$

því næst deili eg 123 með 17, fæ kvótann 7 og afganginn 4, svo að

$$123 \equiv 4 \ (mod.\ 17).$$

Dragi eg nú 4 frá 8, þá sè eg, að fyrsta liðar *residuum* 4 vantar 4 til 8, svo liðurinn í röðinni verður sá fjórði frá hinum fyrsta eða $a + 4$, svo röðin verður svona:

a,	$a+1$,	$a+2$,	$a+3$,	$a+4$,	$a+5$,	$a+6$,	$a+7$,	$a+8$,
123,	124,	125,	126,	127,	128,	129,	130,	131,
4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,

$a+9$,	$a+10$,	$a+11$,	$a+12$,	$a+13$,	$a+14$,	$a+15$,	$a+16$
132,	133,	134,	135,	136,	137,	138,	139
13,	14,	15,	16	0	1	2	3

Hèr sèst þá, að

$$1861 \equiv 127 \equiv 8 \ (mod.\ 17).$$

Seinasti liðurinn í röðinni verður $a + n - 1 = a + (n - 1) = a + 16 = a + (17 - 1) = 123 + 16 = 139$.

Þegar einhver tala er $\equiv 0$, þá gengur *modulus* upp í henni, svo sem hèr í þessari röð 136, svo að

$$136 \equiv 0 \ (mod.\ 17),$$

og 17 í 136 er 8 sinnum, og afgangurinn $= 0$. Þessi afgangur o kemur heldur ekki nema einu sinni, og svo gjöra þeir allir; og allir eru þeir minni en *modulus* eða *divisor*.

106. Tölur, sem ekki hafa sömu minstu leifar, þegar þeim er deilt með sama *divisor*, kallast *incongruent* (ósamsvarandi), og kallast einnig *nonresidua*.

107. Þegar tvær tölur a og b eru samsvarandi eptir einhverjum *modulus* n, þá gengur *modulus* upp í þeirra mismun; það er:

ef $a \equiv b \ (mod.\ n)$, þá er $a - b \equiv 0 \ (mod.\ n)$

ellegar $a - b = ln$,

og er þar l einhver heil tala. Því þar a og b eru *congruent*, þá gefa þær sömu leifar, þegar þeim er deilt með *modulus*

(104). Nú getur deiling þeirra með *modulus* n táknast þannig eptir (103, 5)

$$
\begin{array}{l}
a = hn + q \\
b = kn + r \\
\hline
a - b = (h - k)\, n + (q - r) \\
\qquad\qquad\qquad q - r = 0, \text{ þar leifarnar eru jafnar} \\
\hline
a - b = (h - k)\, n.
\end{array}
$$

Þar h og k eru heilar tölur, þá er $h - k$ einnig heil tala, sem má heita l, þess vegna

$$a - b = ln$$

og þetta þýðir sama sem

$$a - b \equiv 0 \ (mod.\ n)$$

Merk: Þetta má samanbera við fyrsta talnadæmið í (104).

108. Tölur, sem eru samsvarandi eptir vissum *modulus*, eru einnig samsvarandi eptir mælum hans, því ef

$$a - b = ln$$

$$n = \mu\nu; \text{ þegar } \mu \text{ og } \nu \text{ eru heilar tölur, þá er}$$

$$a - b = l\mu\nu$$

það er: ν gengur upp í $a - b$ eða

$$a \equiv b \ (mod.\ \nu).$$

109. Ýmsar tölur a og c, sem eru samsvarandi einni og sömu tölunni b eptir sama *modulus*, eru einnig samsvarandi hvor annari eptir sama *modulus*.

$$a \equiv b \ (mod.\ n)$$

$$c \equiv b \ (mod.\ n), \text{ þá } a \equiv c \ (mod.\ n).$$

$$
\begin{array}{l}
\text{því } \left.\begin{array}{l} a - b = l_1 n \\ c - b = l_2 n \\ - \ + \quad - \end{array}\right\} \text{ eptir (107).} \\
\hline
\quad a - c = (l_1 - l_2)\, n
\end{array}
$$

það er $a \equiv c \ (mod.\ n)$.

110. Leggja má saman samsvaranir sama *modulusar*, draga eina frá annari, margfalda *congruentiu* báðum megin með einni og sömu tölunni, og margfalda ýmislegar *congruentiur* saman, er hafa sama *modulus*; hefja má og *congruentiu* upp í eitt og sama veldi báðum megin, ef vísir veldisins er *positif* og heill. Þannig má álykta:

$$\left.\begin{array}{l} A \equiv a \\ B \equiv b \\ C \equiv c \end{array}\right\} (mod.\ n)$$

þá $A + B + C \equiv a + b + c\ (mod.\ n)$, og $A - B \equiv a - b\ (mod.\ n)$.

Einnig $kA \equiv ka\ (mod.\ n)$, þegar k er *positif* eða *negatif* heil tala, $ABC \equiv abc\ (mod.\ n)$, og $A^k \equiv a^k\ (mod.\ n)$, þegar k er *positif*. Sannanir á þessum setningum geta verið líkar þeim í (108) og (109).

$$\left.\begin{array}{l} A \equiv a\ (mod.\ n) \\ B \equiv b\ (mod.\ n) \\ C \equiv c\ (mod.\ n) \end{array}\right\} \text{samgildir} \left\{\begin{array}{l} A = q_1 n + a \\ B = q_2 n + b \\ C = q_3 n + c \end{array}\right.$$

$A + B + C \equiv a + b + c\ (mod.\ n)$ samg. $A + B + C = (q_1 + q_2 + q_3)\,n + a + b + c$.

Kvótarnir q_1, q_2, q_3, sem framkoma, þegar A, B, C, er deilt með n, standa aldrei í *congruentium*, heldur einungis leifarnar a, b, c.

Eins sannast frádragningin. Margföldunin sannast þannig:

$$\begin{array}{lll} A \equiv a\ (mod.\ n), & \text{samgildir} & A = qn + a \\ k = k & & k = k \end{array}$$

$$kA \equiv ka\ (mod.\ n)\ \text{samgildir}\ kA = kqn + ka$$

Hèr er kvótinn kq, sem ekki stendur í *congruentiunni*, en ka er leifin; og þó það kannske sè ekki minsta leif, þá má þó ætíð finna hana með því að *dividera* ka með n.

Að margfalda megi tvær *congruentiur* saman, sannast þannig:

$$\begin{array}{lll} A \equiv a\ (mod.\ n), & \text{samgildir} & A = q_1 n + a \\ B \equiv b\ (mod.\ n) & \text{——} & B = q_2 n + b \end{array}$$

$$AB \equiv ab\ (mod.\ n)\ \text{samgildir}\ AB = q_1 q_2 n^2 + q_2 na + q_1 nb + ab$$
$$AB = (q_1 q_2 n + q_2 a + q_1 b)n + ab$$

Hèr er $q_1 q_2 n + q_2 a + q_1 b$ kvótinn, sem kemur, þegar AB er deilt með n, en ab er leifin, þó hún sè kannske ekki hin minsta.

Athugi. Um veldi og vísi er í áformi að tala síðar.

111. Frumtala (*numerus primus*) heitir sú tala, sem hefir engan annan mæli en 1 og sjálfa sig. Allar aðrar tölur heita samsettar (*numeri compositi vel divisibiles*).

Dæmi upp á frumtölurnar eru:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

112. **Að finna, hvort gefin tala er frumtala eður samsett.** Þar til hafa menn enga aðra almenna reglu en að reyna eða athuga, hvort nokkur lægri frumtala gengur upp í henni. Þessi athugan verður að byrja með því, að deila með hinum lægstu frumtölum að frátekinni 1, og halda áfram, unz kemur að frumtölu, sem margfölduð með sjálfri sèr gefur *product*, sem er stærra en hin gefna tala. Setjum nefnilega, að hin gefna tala, sem rannsakast átti, væri p, og engin frumtala lægri en α gengi upp í p, en $\alpha^2 > p$, þá er p frumtala. Þetta sěst af því, að því meir sem menn stækka *divisorana*, þá minka kvótarnir, og þegar deilt er með α, og $\alpha\alpha > p$, þá er kvótinn orðinn minni en α, því

$$\frac{p < \alpha\alpha}{\frac{p}{\alpha} < \alpha} : \alpha$$

Það er þá búið að reyna, að engin frumtala $< \alpha$ gengur upp í p. En þar af leiðir þá einnig, að engin samsett tala eða nokkur heil tala $< \alpha$ gengur upp í p. Því engin samsett tala fyrir innan α getur haft aðra frum*factora* en frumtölurnar, sem búið er að reyna, og samsettu tölurnar samanstanda af tómum frumtölum. Þegar því engin frumtala fyrir innan α gengur upp í p, þá er útsèð um það, að engin samsett tala eða nokkur heil tala fyrir innan α gangi upp í p. En setjum nú, að stærri *divisor* en α gangi upp í p; en þá yrði líka minni kvóti en α að ganga upp í p. Því ekki gengur *divisor* upp í tölunni, nema kvóti hans gjöri hið sama. Kvótarnir, sem nú koma, þegar reyna skal *divisorana*, sem eru stærri en α, verða því að hafa tvö eðli: þeir verða að vera heilar tölur, og þeir verða að vera minni en α. En vèr erum búnir að sanna, að engin heil tala minni en α og > 1 gengur upp í p. Þess vegna er p frumtala.

Að *divisor*, sem er heil tala, gangi ekki upp í heilli tölu, nema kvóti hans gjöri hið sama, kemur af því, að *divisor* og kvóti eru *factorar dividendi* (58, 2) eða (57, 2). Frum*factorar* kallast þeir

factorar, sem eru frumtölur (á latínu *factores primi,* á dönsku *Primfactorer = enkelte Factorer*). Samsettir *factorar* eru samsettar tölur (*factores compositi*).

Vèr viljum reyna, hvort 199 er frumtala eða samsett tala.

$199 : 2 = 99\frac{1}{2}$				
$199 : 3 = 66\frac{1}{3}$	$4 = 2.2$			
$199 : 5 = 39\frac{4}{5}$	$6 = 2.3$			
$199 : 7 = 28\frac{3}{7}$	$8 = 2.2.2$	$9 = 3.3$	$10 = 2.5$	
$199 : 11 = 18\frac{1}{11}$	$12 = 2.2.3$			
$199 : 13 = 15\frac{4}{13}$	$14 = 2.7$	$15 = 3.5$	$16 = 2.2.2.2$	
$199 : 17 = 11\frac{12}{17}$	$18 = 2.3.3$			
$199 : 19 = 10\frac{9}{19}$	$20 = 2.2.5$			

Nú er $17 \,.\, 17 = 289 > 199$, $13 \,.\, 13 = 169 < 199$, $\alpha = 17$, $p = 199$ er þá frumtala.

113. Að leysa tölu sundur í hennar einföldu *factora.*

Setjum, að talan væri N. Reyn að *dividera* henni með hinum fyrstu frumtölum 2, 3, 5, 7 o. s. frv., þangað til fyrsta sinn uppgengur. Þessi frumtala hin fyrsta, er gengur upp í N, heiti p_1; deil N með henni aptur, og ef uppgengur annað sinn, verður sá kvóti $\frac{N}{p_1^2}$, í þriðja sinn $\frac{N}{p_1^3}$ o. s. frv. Þegar ekki lengur uppgengur með deilinum p_1, þá tak næstu frumtölu; gangi hún ekki upp, þá hina næstu henni o. s. frv., unz uppgengur. Þessi frumtala önnur, sem uppgengur, heiti p_2; uppgangi hún annað sinn, verður kvótinn $\frac{N}{p_1^2 p_2^2}$ o. s. frv.

Dæmi. Sè gefið $N = 2054943$.

$$
\begin{array}{rrl}
p_1 = & 3)\,2054943 = & N \\
p_1 = & 3)\ \ 684981 = & \dfrac{N}{p_1} = \dfrac{N}{3} \\
p_1 = & 3)\ \ 228327 = & \dfrac{N}{p_1^2} = \dfrac{N}{3^2} \\
p_2 = & 11)\ \ 76109 = & \dfrac{N}{p_1^3} = \dfrac{N}{3^3} \\
p_2 = & 11)\ \ 6919 = & \dfrac{N}{p_1^3 p_2} = \dfrac{N}{3^3.11} \\
p_3 = & 17)\ \ 629 = & \dfrac{N}{p_1^3 p_2^2} = \dfrac{N}{3^3.11^2} \\
p_4 = & 37)\ \ 37 = & \dfrac{N}{p_1^3 p_2^2 p_3} = \dfrac{N}{3^3.11^2.17} \\
 & 1 = & \dfrac{N}{p_1^3 p_2^2 p_3 p_4} = \dfrac{N}{3^3.11^2.17.37}
\end{array}
$$

þá er $N = p_1^3 p_2^2 p_3 p_4 = 3^3.11^2.17.37.$

Þetta má lesa svo:

Talan 2054943 = fyrstu frumtölunni 3 í þriðja veldi, margfaldaðri með annari frumtölunni 11 í öðru veldi sinnum þriðju frumtölunni 17 sinnum fjórðu frumtölunni 37.

Athugi. Þegar hin gefna tala er stór, þá er erfitt að leysa hana sundur í hennar frum*factora*, einkum þegar þeir eru stórir og margar minni frumtölur verður forgefins að reyna. Þess vegna hafa menn útreiknað töflur, sem innihalda hinar fyrstu tölur, leystar sundur í þeirra einföldu gjörendur, svo sem:

Georg Freyherrn von Vega. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, 1. und 2. Band. Leipzig 1814. Nær frá 1 til 102000 og yfir frumtölurnar frá 102000 til 400000.

I. H. Lambert. Supplementa tabularum logarithmicarum & trigonometricarum, cur. Felkel. Olisipone 1798. Inniheldur *factorana* til 1020000.

Cribrum arithmeticum confecit L. Chernac. Daventriæ 1811. Nær með *factorana* til 1020000.

Table des Diviseurs p. Burckhardt. Paris 1814. Hún nær til 3036000.

114. Frumtölur sín á milli eða ósammældar (*numeri primi inter se*, á dönsku: *indbyrdes primiske*) kallast þær, sem hafa engan sammæli utan 1. Þar á móti heita þær tölur samsettar

sín á milli eða sammældar (*numeri compositi inter se*, á dönsku: *indbyrdes sammensatte og fælles delelige Tal*), er hafa sammæli annan en 1.

Dæmi: 9 og 14 eru frumtölur sín á milli, þó hvorug þeirra sè frumtala. 18 og 24 eru samsettar sín á milli.

115. Þegar tala n gengur upp í framkvæmi tveggja annara a og b, þá gengur hún einnig upp í framkvæmi þeirra deilingarleifa, sem koma, þegar þeim er deilt með n. Setjum, að þær sè q og r. Því:

$$a \equiv q \ (mod.\ n)$$
$$b \equiv r \ (mod.\ n),$$

þá er $ab \equiv qr \ (mod.\ n)$ eptir (110).

En nú er gefið, að n gangi upp í ab, það er:

$$ab \equiv 0 \ (mod.\ n) \text{ eptir } (105).$$

Þar af leiðir þá:

$$qr \equiv 0 \ (mod.\ n).$$

Þess vegna gengur n einnig upp í qr eptir (105).

Þetta má einnig sanna þannig:

$$a = hn + q$$
$$b = kn + r.$$

Margfalda saman það, sem er vinstra megin, sèr, og það, sem er hægra megin, sèr, kemur

$$ab = hkn^2 + kqn + hrn + qr$$

það er

$$ab = (hkn + kq + hr)\, n + qr$$

Deil nú með n

$$\frac{ab}{n} = hkn + kq + hr + \frac{qr}{n}.$$

Þess vegna, ef $\frac{ab}{n}$ er heil tala, þá verður $\frac{qr}{n}$ að vera heil tala.

Hèr af leiðir þá, að ef talan n gengur ekki upp í *producti* deilingarleifanna qr, þá gengur hún heldur ekki upp í ab.

116. Hinn minsti samdeilandi tveggja talna a og b er þeirra *product* deilt með þeirra stærsta sammæli.

Setjum $a = mq$, $b = nq$, þá er þeirra sammælir q, og *product* $= mnq^2$. Þetta *product* er einn þeirra samdeilandi. Stærri geta fengizt óteljandi með því að margfalda þenna með öllum

tölum. Að þetta sè samdeilandi, sèst af því, að bæði mq og nq gengur upp í mnq^2. En samdeilandi þessara talna gæti verið minni, því báðar tölurnar ganga upp í mnq. Hèr af sèst, að samdeilandinn verður að hafa í sèr alla talnanna *factora*, og má engan þeirra missa. Nú er *productið*

$$ab = mnq^2 = mnq \,.\, q$$

Deil nú með q, fæst

$$\frac{ab}{q} = \frac{mnq^2}{q} = mnq$$

það er: hinn minsti samdeilandi tveggja talna a og b er þeirra *product* $ab = mnq^2$ deilt með þeirra stærsta sammæli q. En til þess að q sè hinn stærsti sammælir, er hèr gjört ráð fyrir, að a og b sè leystar upp í alla sína *factora* eptir (113) og að q síðan fái alla þá *factora*, sem sameiginlegir eru í a og b.

Sè nú a og b frumtölur sín á milli, þá er $q = 1$ eptir (114), og $\frac{ab}{q} = \frac{ab}{1} = ab$. Þess vegna verður hinn minsti samdeilandi talna, sem eru frumtölur sín á milli $=$ þeirra *producti* ab.

Sè tölurnar fleiri, svo sem

$$\begin{array}{llllll} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \cdots\cdots & a_n \\ = m_1q_1 & m_2q_1 & m_3q_2 & m_4q_3 & m_5q_4 \cdots\cdots & m_nq_{n-1} \end{array}$$

þá er fyrst fundinn minsti samdeilandi fyrir a_1 og a_2 að vera

$$\frac{a_1a_2}{q_1}$$

síðan minsti samdeilandi fyrir

$$\frac{a_1a_2}{q_1} \text{ og } a_3$$

Hafi þessar tölur einhverjar engan sammæli, þá margfaldast þær saman eins og frumtölur sín á milli; því þá er sammælir þeirra $q_2 = 1$. En hafi þær sammæli annan en 1, og hann er er q_2, þá margfaldast tölurnar saman og deilast með honum; verður samdeilandinn

$$= \frac{a_1a_2a_3}{q_1q_2} = \frac{a_1a_2}{q_1} \,.\, \frac{a_3}{q_2}$$

og yfir höfuð:

$$\frac{a_1a_2}{q_1} \,.\, \frac{a_3}{q_2} \,.\, \frac{a_4}{q_3} \cdots\cdots \frac{a_n}{q_{n-1}}$$

það er: Hinn minsti samdeilandi er *product* allra talnanna deilt með hinum stærstu sammælum þeirra. Gangi ein talan upp í annari, þá eru allir mælar hinnar minni fólgnir í hinni stærri, og má sleppa hinni minni alveg úr reikningnum.

Á þessu grundvallast reglurnar í (90) og í dæminu þar má sleppa tölunum

2, 3, 4, 5, 6, 8

eru þá eptir tölurnar

10 15 16 18

Sammælir tveggja fyrstu er $5 = q_1$

Samdeilandi $\frac{10 \,.\, 15}{5} = 10 \,.\, 3 = 30.$

Stærsti sammælir 30 og næstu tölu 16 er $2 = q_2$, þá

$$\frac{10 \,.\, 15}{5} \,.\, \frac{16}{2} \text{ nefnilega } \frac{a_1 q_2}{q_1} \,.\, \frac{a_3}{q_2}$$

Samdeilandi $30 \,.\, 8 = 240$.

Stærsti sammælir 240 og næstu tölu 18 er 6, þá

$$\frac{10 \,.\, 15}{5} \,.\, \frac{16}{2} \,.\, \frac{18}{6} \text{ eða } \frac{a_1 a_2}{q_1} \,.\, \frac{a_3}{q_2} \,.\, \frac{a_4}{q_3}$$

Samdeilandi $30 \,.\, 8 \,.\, 3 = 720$.

Samdeilandi hinna fyrstu þriggja óútstrykuðu talna 10, 15, 16, er í dæminu svona fundinn:

$$\begin{array}{l} 5)\,10\;\;15\;\;16 \\ \hline \;\;\;\;\;\;2\;\;\;3\;\;16 \end{array}$$

og síðan eru 2 útstrykaðir, þar þeir ganga upp í 16, og þá er $5 \,.\, 3 \,.\, 16 = 240$; en í *formulunum* er þetta *product* skoðað sem $5 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 8 = 240$.

Sè nú 4ða talan 18 tekin með, þá er að finna stærsta sammæli handa

5 . 2 . 3 . 8 og 18,

það er 5 . 6 . 8 og 18.

Þá þarf að deila *productinu*

af 5 . 6 . 8 og 18 með 6, sem er þeirra stærsti sammælir,

þá er $\frac{5 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 18}{6} = 5 \,.\, 8 \,.\, 18 = 40 \,.\, 18 = 720.$

Í (90) var búið að deila 16 með 2, og nú er deilt 18 með 2, koma kvótarnir 8 og 9. Loksins er alt margfaldað saman 5 . 2 . 8 . 9; þar af er 5 og 2 *divisorarnir,* en 8 og 9 kvótarnir.

Vèr getum skoðað þetta öðruvísi með því, að leysa allar tölurnar sundur í þeirra einföldu *factora*, og í bókstöfum tákna þær þannig:

$$a_1b_1c_1d_1 \quad a_2b_2c_2d_2 \quad a_3b_3c_3d_3 \quad a_4b_4c_4d_4$$

Hafi þær nú sameiginlega gjörendur, má tákna þá stafi með sama *index*, ef þeir koma ekki nema einu sinni fyrir í sama lið, en álíta þá sem ýmislega gjörendur, ef þeir koma optar í sama lið, t. d. ef a_1 kæmi fram í 1tu 3ju og 4ðu tölunni, og b_1 kæmi í 1tu og 2ri, þar að auki skyldi a_2 koma í annari og 4ðu, þá mætti skrifa þær svona:

$$a_1b_1c_1d_1 \quad a_2b_1c_2d_2 \quad a_1b_3c_3d_3 \quad a_1b_4a_2d_4$$

Síðan mætti margfalda þær saman og deila með *producti* sammælanna þannig:

$$\frac{a_1b_1c_1d_1a_2b_1c_2d_2a_1b_3c_3d_3a_1a_2b_4d_4}{a_1b_1a_2a_1} = a_1b_1c_1d_1a_2c_2d_2b_3c_3d_3b_4d_4$$

Komi sammælir einungis fyrir í tveimur tölum, þá er það nóg til að hann sè sammælir, en komi hann í þremur, verður að skrifa hann að nýju, og svo einu sinni fyrir hverja tölu úr því, sem hann kemur fyrir í.

Skoðum nú þetta eptir (90)

$a_1)$	$a_1b_1c_1d_1$	$a_2b_1c_2d_2$	$a_1b_3c_3d_3$	$a_1b_4a_2d_4$
$b_1)$	$b_1c_1d_1$	$a_2b_1c_2d_2$	$b_3c_3d_3$	$b_4a_2d_4$
$a_2)$	c_1d_1	$a_2c_2d_2$	$b_3c_3d_3$	$b_4a_2d_4$
	c_1d_1	c_2d_2	$b_3c_3d_3$	b_4d_4

Hèr má sjá, að reglunni í (90) ber saman við regluna í (116).

Merk: Fullkomnari og hægri máti kemur síðar (122, 3).

117. Þegar frumtala p gengur hvorki upp í a nè b, þá gengur hún heldur ekki upp í framkvæmi þeirra ab.

Það er sannað (115), að þegar tala (þar n) hèr p gengur upp í framkvæmi tveggja annara a og b, þá gangi hún einnig upp í framkvæmi þeirra deilingarleifa q og r. Þar af leiðir þá einnig, að ef p gengur ekki upp í deilingarleifanna *producti* qr, þá gengur p heldur ekki upp í ab.

Til að sanna, að p gangi ekki upp í ab, er þá nóg að sanna, að p gangi ekki upp í qr. Ef þar þá væri ýmsar slíkar tölur r r' r'', allar minni en p, sem margfaldaðar með q væri deililegar

með p, þá yrði samt ein af þeim að vera minst, t, a. m. r', svo að allar tölur minni en r' margfaldaðar með q væri ekki deililegar með p. Það er enn fremur skiljanlegt, að ef deilt væri p með r', þá kæmi leif, þar p er frumtala og r' getur ekki verið $= 1$ (því þá væri $qr' = q$, sem ekki er deililegt með p, þar það er deilingarleif minni en p). Nefnum vèr þessa leif l og kvótann, sem kemur, þegar p er deilt með r', k, þá er:

$$p = kr' + l$$

þá eptir (26, II.) $p - kr' = l$, og þegar margfaldað er með q, kemur $pq - kqr' = lq$

Nú er hèr pq deililegt með p, sömuleiðis qr' eptir því sem menn gjörðu ráð fyrir, og þess vegna einnig *multiplum* þar af kqr', þar af leiddi þá einnig, að mismunurinn $pq - kqr'$ væri deililegur með p eptir (103, 1). En þessi mismunur er $= lq$ eins og hèr segir. En þá yrði líka p að ganga upp í lq. En nú er $lq < r'q$ (því $l < r'$, þar það er leif eptir $p = kr' + l$). Eptir þessu yrði þá l minni tala en hin minsta, sem margfölduð með q væri deilileg með p. En þetta er mótsögn, því p ætti þá að ganga upp í minni tölu lq heldur en hinni minstu $r'q$, sem það getur gengið upp í. Þess vegna getur ekki framkvæmi tveggja talna, sem báðar eru minni en frumtala, verið deililegar með henni, og þess vegna ekki framkvæmi neinna talna verið deililegt með frumtölu, þegar hún gengur upp í hvorugri þeirra.

Dæmi. Frumtalan 5 gengur ekki upp í 6 nè 9; þó þær sè báðar samsettar, þá gengur 5 ekki upp í *producti* þeirra 54.

118. Þegar fleiri tölur eru en tvær, sem frumtala gengur ekki upp í, og hvað margar sem eru, þá gengur hún ei heldur upp í þeirra *producti*. Þetta leiðir af (117). Því þegar hún ekki gengur upp í *productinu* af tveimur af þeim, þá gengur hún og ekki upp í því og þriðju tölunni með, og þá ekki upp í því *producti* og fjórðu tölunni, sem það væri margfaldað með o. s. frv.

Það leiðir einnig af (117), að ef frumtala gengur upp í *producti* talna, fleiri eða færri, þá verður hún að minsta kosti að ganga upp í einhverri af þeim.

Stundum gengur tala upp í *producti*, þó hún ekki gangi upp í neinum *factoranna*. Þannig gengur 20 hvorki upp í 12 nè 15, þó 20 gangi upp í framkvæmi þeirra 180. Hvernig á þessu

stendur, verður skiljanlegt, ef leystar eru tölurnar upp í þeirra gjörendur, svo sem:

$$\frac{2 . 2 . 3 \text{ og } 3 . 5}{2 . 2 . 5}$$

Hèr ganga fyrri 2 í *divisor* upp í fyrri 2 í *dividendus;* síðari 2 í *divisor* upp í síðari 2 í *dividendus,* og 5 í *divisor* upp í 5 í *dividendus.* þá verða umfram 3. 3 í *dividendus.* Hèr verður kvótinn 9 = 3. 3, því kvótinn fær þá *factora,* sem *dividendus* hefir fram yfir *divisor* (63, 3), því deilir og kvóti eru gjörendur deilanda (58, 2). þó þessir 3 . 3 ekki hefði verið í deilanda, þá hefði deilir samt gengið upp í deilanda, því kvótinn hefði þá orðið

$$\frac{2 . 2 . 5}{2 . 2 . 5} = \frac{20}{20} = 1.$$

119. Samsett tala getur einungis á einn veg orðið uppleyst í frumgjörendur; það er að skilja í sömu frumtölur í sömu veldum.

því setjum, að talan N yrði á tvo vegu uppleyst í frumgjörendur eða einfalda *factora,* eins og í (113), nefnilega að fundið yrði $N = abcd \cdots$, og líka $= ABCD \cdots$; þá væri

$$abcd \cdots = ABCD \cdots$$

Hèr er $abcd \cdots$ *multiplum* af a; þá verður einnig a að ganga upp í $ABCD \cdots$; þess vegna verður a að ganga annaðhvort upp í A ellegar B, ellegar C ellegar D o. s. frv., því ef a gengi ekki upp í neinni þeirra, þá gengi a ekki upp í *productinu* $ABCD \cdots$ eptir (117). Gangi því a upp í A, og báðar eru frumtölur, þá verða þær að vera jafnstórar, því frumtala er einungis deilileg með sjálfri sèr (og 1). (111). Sama væri að segja um a og allar hinar tölurnar $B, C, D \cdots$, að hún verður að vera jöfn einhverri þeirra, þar þær allar eru frumtölur. Setjum því $a = A$ og deilum $abcd \cdots$ með a og $ABCD \cdots$ með A; verða kvótarnir jafnir eptir (76, 1), nefnilega $bcd \cdots = BCD \cdots$ Með sama hætti sannast $B = b$, $C = c$, $D = d$, o. s. frv. Sè nú fleiri frumgjörendur jafnstórir, þá má tengja þá saman í veldi, og veldin verða þá jafnhá í báðum þessum ímynduðu myndum tölunnar N. Verður þá

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

almenn mynd sèrhverrar tölu uppleystrar í frumgjörendur (*primfactora*). Dæmi upp á þessa skript er í (113).

Þegar hugleidd er uppleysingaraðferðin (113) þá er auðsèð, að uppleysingin verður að vera ein og hin sama, því frumtölurnar fást aldrei aðrar en hinar sömu í sömu tölunni.

120. Þegar tala N er *product* fleiri talna, $a, b, c, d \cdots$ (hèr meinast ekki, að a, b, c, d o. s. frv., skuli vera frumtölur eins og í (119), heldur allskonar tölur, bæði frumtölur og samsettar), þá geta þessar tölur a, b, c, d o. s. frv. ekki haft aðra frumgjörendur en þá, sem eru í N, og sèrhver frumgjörandi verður að vera fólginn í $a, b, c, d, \cdots$ til samans, svo opt sem hann er fólginn í N. Í dæminu (113) var

$$N = 2054943 = 3^3 \,.\, 11^2 \,.\, 17 \,.\, 37.$$

Þetta getur verið ýmislega niðurraðað í $abcd$, svo sem

$$3^2 \times 3 \,.\, 11 \times 11 \,.\, 17 \times 37.$$

að tölurnar a, b, c, d sè

$$\begin{aligned} a &= 3^2 = 9 \\ b &= 3.11 = 33 \\ c &= 11.17 = 187 \\ d &= 37 = 37. \end{aligned}$$

Þá hafa tölurnar 9, 33, 187 og 37 sömu frum*factora* sem N, nefnilega 3, 11, 17, og 37, og í sömu veldum til samans sem í N. Því þó a hafi hèr 3 einungis í öðru veldi, nefnilega 3^2, þá hefir b frum*factorinn* 3 í fyrsta veldi; en þegar a og b margfaldast saman, þá hefir ab í sèr 3^3 eins og N. Sömuleiðis, þó b hafi hèr 11 einungis í fyrsta veldi, þá hefir c einnig 11 í fyrsta veldi, og bc til samans 11^2, eins og N.

121. Til þess að tala geti verið *divisor, factor* eða mælir í N, útheimtist tvent:

1, má hún ekki hafa aðra frumgjörendur en $p_1\, p_2\, p_3 \cdots$ sem eru í N, og

2, mega þeir ekki vera hafðir upp til hærri velda, en þeir eru í N; þar á mót mega þeir vera hafðir til allra lægri velda en í N.

Menn geta einnig hugsað sèr *factor* hafðan í 0ta veldi, en þá verður sá factor að 1; því allar tölur í 0ta veldi eru = 1, hvað stórar sem þær eru; nefnilega $n^0 = 1$ (samt er það nokkuð á annan veg, ef $n = 0$ eða ∞, samber (73, 5, og 9). Að $n^0 = 1$

stendur, verður skilja
gjörendur, svo sem:

2 . 2 . 3

2 . 2 .

Hèr ganga fyrri 2 í
2 í *divisor* upp í síð
í *dividendus*. þá ve
kvótinn 9 = 3. 3, þ
hefir fram yfir *divisor*
deilanda (58, 2). þó
þá hefði deilir samt
orðið

2 . 2 .

2 . 2 . 5

119. Samsett t
leyst í frumgjörendur;
veldum.

því setjum, að tala
endur eða einfalda *fa*
yrði $N = abcd \cdots$,

$abcd \cdots$

Hèr er $abcd \cdots$ mu
upp í $ABCD \cdots$; þe
upp í A ellegar B, elle
ekki upp í neinni þeirra,
$\cdots$ eptir (117). Gangi
þá verða þær að vera ja
með sjálfri sèr (og 1). (1
hinar tölurnar $B, C, D \cdots$
þeirra, þar þær allar eru f
um $abcd \cdots$ með a og
jafnir eptir (76, 1), nefnilega
hætti sannast $B = b$, $C =$
frumgjörendur jafnstórir,
veldin verða þá
unnar N. Verð

N

hjá oss,
summan

factora-
factortalan

dæmi og

$3^3 . 11^2$
$3(1 + 2) = 12,$
summa þeirra á að vera $=$
$= 5320$

40
440
4840
5320.

summa þeirra í hinum þremur fyrstu
að margfaldast með 1 +

$^2 + 3^3 + 11 + 3 . 11 + 3^2 . 11 + 3^3 . 11 +$
$11^2 + 3^2 . 11^2 + 3^3 . 11^2 + 17 + 3 . 17 + 3^2$
$17 + 11 . 17 + 3 . 11 . 17 + 3^2 . 11 . 17 +$
$+ 11^2 . 17 + 3 . 11^2 . 17 + 3^2 . 11^2 . 17 +$

essara *factora* á að vera $= 5320 . {}^{288}/_{16} = 5320 .$
0, og tala þeirra $= 12 . 2 = 24$.
na *factorana* og summu þeirra í allri tölunni N, á
duct að margfaldast með $1 + 37$, þá fæst.
$3^2 + 3^3 + 11 + 3 . 11 + 3^2 . 11 + 3^3 . 11$
$3 . 11^2 + 3^2 . 11^2 + 3^3 . 11^2 + 17 + 3 . 17 +$
$3^3 . 17 + 11 . 17 + 3 . 11 . 17 + 3^2 . 11 . 17$
$. 17 + 11^2 . 17 + 3 . 11^2 . 17 + 3^2 . 11^2 . 17$
$. 17 + 37 + 3 . 37 + 3^2 . 37 + 3^3 . 37 +$
$3 . 11 . 37 + 3^2 . 11 . 37 + 3^3 . 11 . 37 +$
$3 . 11^2 . 37 + 3^2 . 11^2 . 37 + 3^3 . 11^2 . 37 +$
$3 . 17 . 37 + 3^2 . 17 . 37 + 3^3 . 17 . 37 + 11$
$3 . 11 . 17 . 37 + 3^2 . 11 . 17 . 37 + 3^3 . 11$
$11^2 \, 17 . 37 + 3 . 11^2 . 17 . 37 + 3^2 . 11^2 . 17$
$1^2 . 17 . 37.$
ssara *factora* á að vera $= 95760 \times {}^{1368}/_{36} =$
$= 3638880$, og tala þeirra $= 24 . 2 = 48$.
rar geta nú verið dæmi upp á $p_1^{m_1} \, p_2^{m_2} \, p_3^{m_3} \, p_4^{m_4}$
nnu mynd *factoranna*, sem umtöluð er í þessum

r nokkrar tölur eru leystar upp í frumgjörendur,
það, sem nú skal greina:
ru frumtölur sín á milli, eða samsettar sín á milli.
ra stærsti sammælir. Þeir frumgjörendur, sem
verða að setjast í hið lægsta veldi, sem þeir
nginn frum*factor* hinn sami í þeim öllum, þá
mæli allar nema 1, þó nokkrar þeirra kunni
minsti samdeilandi. Til að finna hann,
taka alla þá *factora*, sem finnast í tölun-
. Síðan setja hvern þeirra í hið hæsta
tölunum. Hér þarf essa um neina

sè satt, kemur til af því, að allar tölur deildar með sjálfum sèr, verða = 1; þannig er $\frac{n^\lambda}{n^\lambda} = 1$.

Nú er $n^0 = n^{\lambda - \lambda}$ því $\lambda - \lambda = 0$

$n^{\lambda - \lambda} = \frac{n^\lambda}{n^\lambda}$ eptir (63, 4)

$\frac{n^\lambda}{n^\lambda} = 1$, því tala deild með sjálfri sèr er = 1.

þess vegna

$n^0 = 1$.

Af þessu verða *factorarnir* í *nullta* veldi sama sem 1.

Til þess nú að kunngjöra form allra deilanna í N, má hafa þessa skript:

$$p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdots\cdots p_t^{m_t}$$

þannnig að

m_1 sè ein af tölunum $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots \alpha_1$

m_2 ein af tölunum $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots \alpha_2$

m_3 ein af tölunum $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots \alpha_3$

m_t ein af tölunum $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots \alpha_t$

þegar talan N hefir þetta form:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots\cdots p_t^{\alpha_t}$$

Með þessu móti verða í talnadæminu (120) *factorarnir* í $p_1^{\alpha_1}$ eða 3^3 þessir:

$$3^0 \; 3^1 \; 3^2 \; 3^3$$

og summa þeirra

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$$

það er

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3$$

eða

$$1 + 3 + 9 + 27$$

Hèr er auðsèð, að tölurnar 1, 3, 9, 27 eru allar saman *factorar* í 27, og er fjöldi þeirra:

$$1 + \alpha_1 = 1 + 3 = 4$$

Sömuleiðis eru *factorarnir* úr $p_2^{\alpha_2}$ eða 11^2 þessir

$$11^0 \; 11^1 \; 11^2$$

og summa þeirra

$$11^0 + 11^1 + 11^2$$

það er

$$1 + 11 + 11^2$$

eða

$$1 + 11 + 121.$$

Hèr er auðsèð, að tölurnar

$$1 \quad 11 \quad 121$$

eru allar *factorar* í 121, og er fjöldi þeirra

$$1 + \alpha_2 = 1 + 2 = 3.$$

Þar á móti eru *factorarnir* úr $p_3^{\alpha_3}$ eða 17^1 ekki nema

$$17^0 \quad 17^1 \text{ eða}$$

$$1 \quad 17$$

og summa þeirra

$$1 + 17$$

og er auðsèð, að 1 og 17 eru allir *factorarnir* í 17, og tala þeirra eða fjöldi

$$1 + \alpha_3 = 1 + 1 = 2.$$

Loksins eru *factorarnir* úr $p_4^{\alpha_4}$ eða 37^1 ekki nema

$$37^0 \quad 37^1 \text{ eða } 1 \text{ og } 37$$

og summa þeirra $1 + 37$, og er auðsèð, að *factorarnir* í 37 ekki eru aðrir en 1 og 37 og tala þeirra ekki nema $1 + \alpha_4 = 1 + 1 = 2$. Yfir höfuð er ætíð úr einu frumtöluveldi:

Tala *factoranna* = 1 + veldis*exponentinn*, því 0 er ekki talið með í veldis*exponentinum*.

Höfuðreglan *factora*summunnar í einu frumtöluveldi er

$$1 + p_t + p_t^2 + p_t^3 \cdots p_t^{\alpha_t}$$

Vilji menn nú finna *factorana* sjálfa ásamt *factora*summunni úr *productum* frumtalnavelda, þá má margfalda saman *factora*summurnar úr hinum einstöku frumtöluveldum, eins og *polynomia* eptir (53, 2). En hinir einstöku liðir í *partialproductunum* leggjast þó ekki saman, því ella slengdist sjálfir *factorarnir* saman.

Factorarnir í N verða þá allir liðirnir í þessu *producti*.

$$(1 + p_1 + p_1^2 \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots$$
$$(1 + p_t + p_t^2 \cdots p_t^{\alpha_t}).$$

Þetta *product* má nú kunngjörast styttra eptir (64, *A*) þannig:

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_t^{\alpha_t+1}-1}{p_t-1}$$

því í *serie A*

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \cdots a^{n-2}\,x + a^{n-1}$$

er $x = p_t,\ n = \alpha_t + 1,\ a = 1$, þess vegna

$$\frac{p_t^{\alpha_t+1}-1}{p_t-1} = p_t^{\alpha_t} + p_t^{\alpha_t-1} + p_t^{\alpha_t-2} \cdots p_t + 1$$

þó að þessi *series* snúi öfugt við það, sem veldin hækka hjá oss, er það þó auðsèð, að allir liðirnir eru hinir sömu, og summan því hin sama.

*Factora*talan í *productum* frumtalnavelda er *product factora*-talnanna í hinum margflölduðu frumtalnaveldum, og *factora*talan í N verður

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_t)$$

Heimfærum vèr þessar *formulur* upp á ofanskrifað dæmi og tökum *product* tveggja fyrstu frumtöluveldanna

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha}$$

þá höfum vèr

$$\begin{array}{l}
1 + 3 + 3^2 + 3^3 \\
1 + 11 + 11^2 \\
\hline
1 + 3 + 3^2 + 3^3 \\
\qquad 11 + 3.11 + 3^2.11 + 3^3.11 \\
\qquad\qquad 11^2 + 3.11^2 + 3^2.11^2 + 3^3.11^2
\end{array}$$

þessir *factorar* eiga að vera að tölu $(1 + 3)(1 + 2) = 12$, og þeir ganga allir upp í $3^3\ 11^2$, og summa þeirra á að vera $=$

$$\frac{3^4-1}{3-1} \cdot \frac{11^3-1}{11-1} = \frac{80}{2} \cdot \frac{1330}{10} = 5320$$

og stendur það heima, því:

Summan í fyrsta *partialproductinu* er	40
í öðru	440
í þriðja	4840
	5320.

Til að fá *factorana* og summu þeirra í hinum þremur fyrstu frumtalnaveldum, á nú þetta *product* að margfaldast með $1 + 17$, þá fæst

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 11 + 3 . 11 + 3^2 . 11 + 3^3 . 11 + 11^2 + 3 . 11^2 + 3^2 . 11^2 + 3^3 . 11^2 + 17 + 3 . 17 + 3^2 . 17 + 3^3 . 17 + 11 . 17 + 3 . 11 . 17 + 3^2 . 11 . 17 + 3^3 . 11 . 17 + 11^2 . 17 + 3 . 11^2 . 17 + 3^2 . 11^2 . 17 + 3^3 . 11^2 . 17$

Summa þessara *factora* á að vera $= 5320 . {}^{288}/_{16} = 5320 . 18 = 95760$, og tala þeirra $= 12 . 2 = 24$.

Til að finna *factorana* og summu þeirra í allri tölunni N, á nú þetta *product* að margfaldast með $1 + 37$, þá fæst.

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 11 + 3 . 11 + 3^2 . 11 + 3^3 . 11 + 11^2 + 3 . 11^2 + 3^2 . 11^2 + 3^3 . 11^2 + 17 + 3 . 17 + 3^2 . 17 + 3^3 . 17 + 11 . 17 + 3 . 11 . 17 + 3^2 . 11 . 17 + 3^3 . 11 . 17 + 11^2 . 17 + 3 . 11^2 . 17 + 3^2 . 11^2 . 17 + 3^3 . 11^2 . 17 + 37 + 3 . 37 + 3^2 . 37 + 3^3 . 37 + 11 . 37 + 3 . 11 . 37 + 3^2 . 11 . 37 + 3^3 . 11 . 37 + 11^2 . 37 + 3 . 11^2 . 37 + 3^2 . 11^2 . 37 + 3^3 . 11^2 . 37 + 17 . 37 + 3 . 17 . 37 + 3^2 . 17 . 37 + 3^3 . 17 . 37 + 11 . 17 . 37 + 3 . 11 . 17 . 37 + 3^2 . 11 . 17 . 37 + 3^3 . 11 . 17 . 37 + 11^2 17 . 37 + 3 . 11^2 . 17 . 37 + 3^2 . 11^2 . 17 . 37 + 3^3 . 11^2 . 17 . 37.$

Summa þessara *factora* á að vera $= 95760 \times {}^{1368}/_{36} = 95760 . 38 = 3638880$, og tala þeirra $= 24 . 2 = 48$.

Þessir *factorar* geta nú verið dæmi upp á $p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\, p_3^{m_3}\, p_4^{m_4}$ eða hina almennu mynd *factoranna,* sem umtöluð er í þessum (121) tölulið.

122. Þegar nokkrar tölur eru leystar upp í frumgjörendur, er hægt að sjá það, sem nú skal greina:

1, hvort þær eru frumtölur sín á milli, eða samsettar sín á milli.

2, hver sè þeirra stærsti sammælir. Þeir frumgjörendur, sem eru í þeim öllum, verða að setjast í hið lægsta veldi, sem þeir hafa í þeim. Sè enginn frum*factor* hinn sami í þeim öllum, þá hafa þær engan sammæli allar nema 1, þó nokkrar þeirra kunni að hafa hann.

3, hver sè þeirra minsti samdeilandi. Til að finna hann, þarf þá ekki annað en taka alla þá *factora,* sem finnast í tölunum, og skrifa þá í röð. Síðan setja hvern þeirra í hið hæsta veldi, sem þeir hafa í tölunum. Hèr þarf ekki að hugsa um neina

sammæla, eins og þurfti í (116). Í dæminu, sem þar var tekið, voru tölurnar:

10 15 16 18

Uppleystar 2.5 3.5 2^4 2.3^2

Hèr sè eg þrjár frumtölur:

2, 3, 5,

þá set eg hverja þeirra í hið hæsta veldi, sem þær hafa í tölunum, og fæ

2^4, 3^2, 5,

og er þar þá kominn hinn minsti samdeilandi $= 16 . 9 . 5 = 144 . 5 = 720$.

Hafa má svipaða aðferð til að finna stærsta sammæli og minsta samdeilanda handa tilteknum tölum, sem eru uppleystar í *frumfactora*, þá: að rita alla frumgjörendur þeirra í röð, og setja síðan hvern þeirra í hið lægsta veldi, sem þeir hafa í tölunum. En þar af leiðir, að þeir verða að setjast í 0ta veldi, sem ekki fyrirkoma nema í sumum af tölunum. Í þessum tölum voru *frumfactorarnir*

2 3 5,

2 koma ekki fyrir í 15, 3 ekki í 10, og 16, og 5 ekki í 16 nè 18. þessir *factorar* eru því í 0ta veldi, eða $= 1$ í þeim tölum, sem þeir ekki fyrirkoma í, og 0ta veldi er þeirra hið lægsta í tölunum. Stærsti sammælirinn verður því:

$2^0 . 3^0 . 5^0 = 1$.

123. Stærsti sammælir talna er ætíð deililegur með sèrhverjum sammæli sömu talna; og hinn minsti samdeilandi er mælir allra samdeilanda sömu talna.

Því þegar nokkrir mælar $p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \ldots$ ganga upp í ýmsum tölum N, P, Q, þá verða mælarnir að hafa sömu frumtölur sem þær, og enga aðra frumtölu en sem liggur í þeim (121). Þessir mælar geta því allir sezt í það hið almenna form $p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \ldots$ hvað frumtölurnar $p_1, p_2, p_3, \ldots$ snertir. En veldisvísarnir $m_1, m_2, m_3 \ldots$ geta verið ýmislegir. Nú þar stærsti sammælirinn er svo gerður, að frumtölur hans eru í hinu lægsta veldi, sem þær hafa í tölunum N, P, Q, þá verða hinir minni sammælar að hafa einhverjar frumtölurnar í lægri veldum, heldur en stærsti sammælirinn. Þar nú allar frumtölurnar eru hinar sömu, og ekkert getur verið ólíkt nema veldisvísarnir, þá má *subtrahera*

exponent hverrar frumtölu í hinum minni sammælum frá *exponent* hinnar sömu frumtölu í hinum stærsta sammæli eptir (63, 4); kemur þá í kvótann sama frumtala með *exponenti*, sem er mismunur hennar *exponenta* í deili og deilanda. Sama er að segja um allar frumtölurnar í mælunum. Setjum nefnilega, að hinn stærsti sammælir sè

$$p_1^{m_1}\, p_2^{m_2}\, p_3^{m_3} \dots$$

en hinir aðrir sammælar hafi formið

$$p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} p_3^{\mu_3} \dots$$

þá verður að vera $\mu_1 \leqq m_1$, $\mu_2 \leqq m_2$, $\mu_3 \leqq m_3$ o. s. frv., og þá er

$$\frac{p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots}{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} p_3^{\mu_3} \dots} = p_1^{m_1-\mu_1} p_2^{m_2-\mu_2} p_3^{m_3-\mu_3} \dots\dots$$

Svo kvótinn er heil tala.

Dæmi í tölum: tölurnar skyldu vera:

43740000 486000 2700

og uppleystar í frum*factora:*

$2^5 . 3^7 . 5^4$ $2^4 . 3^5 . 5^3$ $2^2 . 3^3 . 5^2$

Frumgjörendurnir eru

2, 3, 5

settir í lægstu veldin

$2^2 . 3^3 . 5^2$

þetta *product* er þá þeirra stærsti sammælir. Aðrir sammælar geta verið:

2 . 3 . 5 ellegar $2^2 . 3 . 5$ ellegar $2^2 . 3^3 . 5^0 = 2^2 . 3^3 = 108$.

og yfir höfuð geta *exponentarnir* í hinum minni sammælum verið við 2 annaðhvort 2, 1 ellegar 0, við 3 annaðhvort 3, 2, 1 eða 0, og við 5 annaðhvort 2, 1, eða 0. En hvernig sem þetta er, þá er hinn stærsti sammælir $2^2 . 3^3 . 5^2$ deililegur með öllum öðrum t. d.

$\frac{2^2 . 3^3 . 5^2}{2 . 3 . 5} = 2 . 3^2 . 5$; hèr er $m_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $m_1 - \mu_1 = 1$, $m_2 = 3$, $\mu_2 = 1$; $m_2 - \mu_2 = 2$; $m_3 = 2$, $\mu_3 = 1$, $m_3 - \mu_3 = 1$; þess vegna kvótinn $= 2^1 . 3^2 . 5^1 = 2 . 3^2 . 5$, og eins er með alla hina sammælana.

Að hinn minsti samdeilandi sè mælir allra annara samdeil-

anda sömu talna, leiðir með líkum hætti af því, að frumtölurnar eru hinar sömu í hinum minsta samdeilanda sem í tölunum N, P, Q, og *exponentarnir* í honum eins stórir sem hinir stærstu í þeim, (121) samborið við (89), og þar eð tölurnar N, P, Q, eiga einnig að mæla alla sína samdeilendur, þá verða sömu frumtölurnar í sínum hæstu veldum einnig að liggja í öllum þeim. Og þar að auki geta í hinum stærri samdeilöndum talnanna N, P, Q, verið fólgnar aðrar frumtölur, sem ekki liggja í N, P, Q.

124. Þegar ýmsar tölur margfaldast með sama *factor*, ellegar deilast með sameiginlegum *divisor* (mæli), þá verður bæði þeirra stærsti sammælir og einnig þeirra minsti samdeilandi *multiplicerаðir* með sama *factor* eða *divideraðir* með þeim sameiginlega *divisor*.

Setjum tölurnar sè N, P, Q og marfaldist með n, svo verði nN, nP, nQ; enn framar sè stærsti sammælir þeirra $= s$, og stærsti samdeilandi $= S$; þá verður

$\frac{N}{s} = t$ þá er $N = st$ og $nN = nst = ns.t$

$\frac{P}{s} = u$ $P = su$ $nP = nsu = ns.u$

$\frac{Q}{s} = v$ $Q = sv$ $nQ = nsv = ns.v$

þá er

$\frac{nN}{t} = ns$

$\frac{nP}{u} = ns$

$\frac{nQ}{v} = ns$

þess vegna $n$földu N, P, Q, fylgir $n$falt s.

Enn framar sè

$\frac{S}{N} = p$, þá er $\frac{S}{p} = N$, og $\frac{nS}{p} = nN$, og $nS = nN.p$

$\frac{S}{P} = æ$ $\frac{S}{æ} = P$ $\frac{nS}{æ} = nP$ $nS = nP.æ$

$\frac{S}{Q} = ö$ $\frac{S}{ö} = Q$ $\frac{nS}{ö} = nQ$ $nS = nQ.ö$

Yfir höfuð: $n$földu N, P, Q fylgir $n$falt S.

Hvað deilinguna snertir með sameiginlegum *divisor*, þá má setja $n = \frac{1}{r}$, þannig að r sè sá sameiginlegi *divisor*. Þá er

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{r}N}{t} &= \frac{N}{rt} = \frac{1}{r}s = \frac{s}{r}\\
\frac{\frac{1}{r}P}{u} &= \frac{P}{ru} = \frac{1}{r}s = \frac{s}{r}\\
\frac{\frac{1}{r}Q}{v} &= \frac{Q}{rv} = \frac{1}{r}s = \frac{s}{r}
\end{aligned}\right\}\ \frac{1}{r}\text{ af } N,\ P,\ Q \text{ fylgir } \frac{1}{r}s.$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{r}S}{þ} &= \frac{S}{þ} = \frac{1}{r}N = \frac{N}{r}\\
\frac{\frac{1}{r}S}{æ} &= \frac{S}{æ} = \frac{1}{r}P = \frac{P}{r}\\
\frac{\frac{1}{r}S}{ö} &= \frac{S}{ö} = \frac{1}{r}Q = \frac{Q}{r}
\end{aligned}\right\}\ \frac{1}{r}\text{ af } N,\ P,\ Q \text{ fylgir } \frac{1}{r}S.$$

Dæmi í tölum:

	$N = 720$	$P = 120$	$Q = 300$
uppleyst	$2^4.3^2.5$	$2^3.3.5$	$2^2.3.5^2$

Stærsti sammælir $s = 2^2.3.5 = 60.$

Minsti samdeilandi $S = 2^4.3^2.5^2 = 360.$

Margföldum nú allar þrjár tölurnar með $6 = n$, kemur

$2^4.3^2.5.6 \qquad 2^3.3.5.6 \qquad 2^2.3.5^2.6$

fáum vèr einnig $6s = 2^2.3.5.6 = 60.6 = 360$

og $6S = 2^4.3^2.5^2.6 = 360.6 = 2160.$

Hinar 6földuðu tölur eru nú

$2^5.3^3.5 \qquad 2^4.3^2.5 \qquad 2^3.3^2.5^2$

þá stærsti sammælir $= 2^3.3^2.5$

Minsti samdeilandi $= 2^5.3^3.5^2$.

Eins er, ef vèr deilum með sameiginlegum *divisor*, t. d. með 5, eða kippum *factornum* 5 úr þremur tölunum, þá verða þær

$2^4.3^2 \qquad 2^3.3 \qquad 2^2.3$

Stærsti sammælir $= 2^2.3$

Minsti samdeilandi $= 2^4.3^2$

Þannig hverfa þessir 5 einnig úr stærsta sammæli og minsta samdeilanda.

Að tölurnar *t*, *u*, *v*, *þ*, *æ*, *ö*, gjöra hèr enga breytingu, sèst af því, að þær eru hinar sömu, hvort sem menn margfalda eða margfalda ekki, deila eða deila ekki.

125. Hinn stærsti sammælir talna er hinn minsti samdeilandi allra sammæla þeirra.

Því sá stærsti sammælir talnanna hefir í sèr alla sammæla þeirra og frumtölur þeirra allar í hinum lægstu veldum, sem þær hafa í tölunum (122). En þegar vèr berum hinn stærsta sammæli saman við sammælana sjálfa, þá hefir hann allar frumtölur þeirra allra í hinum hæstu veldum (123). Það er með öðrum orðum: hann er þeirra minsti samdeilandi (122).

Til dæmis veljum vèr sömu tölurnar sem í (124).

$$2^4 . 3^2 . 5 \qquad 2^3 . 3 . 5 \qquad 2^2 . 3 . 5^2$$

Stærsti sammælir $= 2^2 . 3 . 5 = 60$.

Sammælarnir eru:

$$\begin{aligned}
2^2 . 3 . 5 &= 60 \\
2^2 . 3^0 . 5 &= 20 \\
2^2 . 3^0 . 5^0 &= 4 \\
2^2 . 3 . 5^0 &= 12 \\
2 . 3 . 5 &= 30 \\
2 . 3^0 . 5 &= 10 \\
2 . 3 . 5^0 &= 6 \\
2 . 3^0 . 5^0 &= 2 \\
2^0 . 3 . 5 &= 15 \\
2^0 . 3^0 . 5 &= 5 \\
2^0 . 3^0 . 5^0 &= 1
\end{aligned}$$

Að stærsti sammælirinn hefir hèr í sèr allar frumtölur sammælanna í þeirra hæstu veldum, er hèr ljóst; og að hann þess vegna sè þeirra minsti samdeilandi eptir (122) og (123).

Eptir aðferðinni í (90) að finna minsta samdeilanda stendur reikningurinn svo:

$$\begin{array}{l}
2)\ 20\ \cancel{4}\ 12\ 30\ \cancel{10}\ \cancel{6}\ \cancel{2}\ \cancel{15}\ \cancel{5}\ \cancel{1} \\
\hline
2)\ 10\quad 6\ 15 \\
\hline
\quad\cancel{5}\quad \cancel{3}\ 15
\end{array}
\qquad 2 . 2 . 15 = 60, \text{ minsti samdeilandi.}$$

Það er athugavert við þessa aðferð, að hún stundum gefur ekki hinn minsta samdeilanda, heldur annan stærra, það er að skilja, ef menn ekki deila með frumtölunum eða hinum minstu tölum. Þannig er í þessu dæmi, ef menn deila með 4 í staðinn fyrir með 2 . 2, þá er það svo:

$$\begin{array}{l}
4)\ 20\ 12\ 30 \\
\hline
\quad\ \cancel{5}\ \ \cancel{3}\ 30
\end{array}
\qquad 4 . 30 = 120, \text{ stærri samdeilandi.}$$

Eins er, ef menn deila með 10

$$\begin{array}{r|rrr} 10) & 20 & 12 & 30 \\ \hline & 2 & 12 & 3 \end{array} \quad 10 \,.\, 12 = 120, \text{ stærri samdeilandi.}$$

Þar á móti, ef deilt er með 3:

$$\begin{array}{r|rrr} 3) & 20 & 12 & 30 \\ \hline & 20 & 4 & 10 \end{array} \quad 3 \,.\, 20 = 60, \text{ minsti samdeilandi.}$$

Það sýnist vera merkilegt, að margar góðar reikningsbækur ekki skuli vara menn við því, að deila með samsettum tölum, þegar menn með þessari aðferð vilja finna minsta samdeilanda.

Vilji menn hafa aðferðina (116), sem er miklu lengri, til að finna minsta samdeilanda, þá hafa 20 og 12 sammæli 2; má því skrifa í *divisorinn factorinn* 2. En svo hefir 30 einnig mælinn 2, og má því skrifa í *divisorinn* 2 annað sinn, svo þar standi 2 . 2. En svo hafa 20 og 12 sammælinn 2 annað sinn; má því skrifa í *divisorinn* mælinn 2 þriðja sinn, svo þar standi 2 . 2 . 2. Svo hafa 12 og 30 sammælinn 3; verður því að skrifa hann í *divisorinn* einu sinni; er þá komið 2 . 2 . 2 . 3. Loksins hafa 20 og 30 sammælinn 5, og má skrifa hann einu sinni, svo í *divisornum* verður þá 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120. Að þessu búnu margfaldast saman allar tölurnar 20, 12 og 30; kemur 7200, og það deilist með 120; fæst minsti samdeilandi 60.

126. Framkvæmi tveggja talna er jafnt framkvæmi hins stærsta sammælis og minsta samdeilanda þeirra. Setjum tölurnar sè P og Q, stærsti sammælir $= s$, og minsti samdeilandi $=$ S, þá er

$$PQ = sS.$$

Hèr er gjört ráð fyrir, að tölurnar sè leystar upp í þeirra frumgjörendur eptir (113). Til að sanna setningu þessa, þarf ei að skipta sèr af nema einni frumtölunni í báðum tölunum P og Q, því hið sama er að segja um þær allar. Nú hefir þessi frumtala annaðhvort sama eða misstóra *exponenta* í báðum tölunum. Segjum fyrst hún hafi þá misstóra, þá tekur s hinn minna og S hinn stærra, og summa þessara *exponenta* verður *exponenta* summan, þegar s og S skulu margfaldast saman, eins og þegar P og Q margfaldast saman. Frumtalan (rótin) er hin sama í s og S sem í P og Q, og *exponenta*summan sama, svo *productið* er hið sama PQ sem sS eptir margföldunarreglum við *monomia* (53). Sè veldisvísarnir jafnir, þá tvöfaldast þeir bæði í PQ og

sS og *productin* verða ein og sama stærðin við báðar margfaldanirnar.

$$s = 5^2 . 7^3 . 11^2 \qquad P = 5^4 . 7^3 . 11^2$$
$$S = 5^4 . 7^4 . 11^3 \qquad Q = 5^2 . 7^4 . 11^3$$
$$sS = 5^6 . 7^7 . 11^5 \qquad PQ = 5^6 . 7^7 . 11^5$$

Af þessari setningu leiðir þá, að stærsti sammælir og minsti samdeilandi geta ákvarðazt í tveimur tölum hvor af öðrum.

127. Hinn stærsti sammælir og minsti samdeilandi breytast ekki fyrir það í öllum tölunum, þó hvor þeirra sè settur fyrir tvær af tölunum sjálfum, það er að skilja sá, sem gildir í þeim tveimur tölum, sè settur fyrir þær tvær tölur sjálfar. því:

Hinn stærsti sammælir fleiri talna er *product* frumtalna þeirra allra í lægstu veldum. Frumtölurnar geta álitizt hinar sömu í öllum tölunum, þegar hinar vantandi eru skoðaðar í nullta veldi. Hin lægstu veldi eru hin sömu, hvort sem þau eru út af fyrir sig, eða sameinuð öðrum hærri. Hèr verður því í tilliti til stærsta sammælis engin breyting á honum í öllum tölunum, þó í staðinn fyrir hverjar tvær af tölunum sè settur þeirra stærsti sammælir. Líkt er það að sínu leyti með hinn minsta samdeilanda. Hin hæstu veldin eru hin sömu, hvort sem þau eru út af fyrir sig, eða sameinuð öðrum lægri. þar verður því engin breyting á hinum minsta samdeilanda, þó tveggja talna minsti samdeilandi sè settur fyrir þær tvær tölur sjálfar.

Hèr af leiðir, að það er leyfilegt að útreikna stærsta sammæli og minsta samdeilanda fyrir tvær af tölunum fyrst, setja svo það, sem útkemur fyrir þær sömu báðar, taka svo hina þriðju með útkomunni af hinum fyrstu, svo hina fjórðu með útkomunni annari o. s. frv.

Athugi. þetta leyfi hefir einnig verið notað (116), þar sem reglan fyrir minsta samdeilanda er útvíkkuð til fleiri talna. En þar ekkert síðan hefir verið grundvallað á þeirri reglu, álítum vèr það ekki skaða vort *mathematiska* lærdómskerfi.

128. **Tala, sem er ósammæld með fleirum öðrum, er einnig ósammæld með þeirra framkvæmi; og þegar ýmsar tölur eru ósammældar, þá eru þær það einnig með öllum heilum veldum þeirra talna.** því:

þegar tölurnar eru ósammældar, þá hafa þær engan sammæli

utan 1, (114). Þá eru einnig frumtölur þeirra ýmislegar. Frumtala hinnar einu gengur því ekki upp í frumtölum hinna annara og ekki upp í *productum* þeirra (117), (118), og þess vegna ekki upp í þeirra heilu veldum.

Athugi. Hèr hjálpar ekki það ráð, að setja hinar vantandi frumtölur í nullta veldi til að gefa þeim sameiginlegt form; því þó frumtala í 0ta veldi sè hafin upp í veldi, þá verður hún þó æfinlega í 0ta veldi, því *exponentinn* 0 verður aldrei nema 0, með hvaða tölu sem hann er margfaldaður (73, 4).

129. Tala, sem er deilileg með fleiri öðrum tölum, er einnig deilileg með þeirra minsta samdeilanda.

Því þegar talan er deilileg með þeim öðrum tölum, þá hefir hún í sèr allar frumtölur þeirra, og þær hinar sömu annaðhvort í hærri veldum, ellegar að minsta kosti í jafnháum veldum sem í þeim. Hinn minsti samdeilandi þessara talna hefir frumtölur allar hinar sömu sem þær, en einungis í hæstu veldum þeirra (122, 3), og þess vegna aldrei í hærra veldi, en þær frumtölur hafa í tölunni, sem er deilileg með þeim. Hèr af leiðir setningu þá, er sannast átti.

130. Frumgjörendurnir í veldistölu $n$ta stigs eða veldis framkoma í veldum, þannig að veldisvísarnir eru deililegir með n. Sè nefnilega:

$$N = a^n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots . p_t^{\alpha_t}$$

$$\text{og} \quad a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots . p_t^{\beta_t}$$

Því þegar a er hafið upp í $n$ta veldi, þá eru vísarnir margfaldaðir með n, kemur þá

$$a^n = p_1^{n\beta_1} p_2^{n\beta_2} p_3^{n\beta_3} \ldots . p_t^{n\beta_t}$$

Þá verður $\alpha_1 = n\beta_1$, $\alpha_2 = n\beta_2 \cdots \alpha_t = n\beta_t$

Skýring. Að hefja upp í veldi mun vera nokkurn veginn skiljanlegt af (53); þar sem er sönnuð reglan um *exponentana*. Að hefja stærð upp í veldi er að setja hana svo opt *factor* sem *exponentinn* ákveður. Vilji eg hefja 5 upp í 3ja veldi, set eg

$$5^3 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125.$$

Vilji eg hefja m^2 upp í 4ða veldi, þá set eg

$$(m^2)^4 = m^2 \,.\, m^2 \,.\, m^2 \,.\, m^2$$

$$= m^{2+2+2+2} = m^8$$

því *exponentar* sama stafs eiga að leggjast saman í margföldunínni eptir (53). En þegar *exponentinn* er hinn sami við alla *factorana*, eins og er í velda upphafningunni, þá snýst samlagning *exponentanna* í margföldun með *exponentinum*; þess vegna

$$(m^2)^4 = m^{2 \cdot 4} = m^8.$$

þess vegna, þegar a er hafið upp í n^{ta} veldi, þá eru vísarnir β margfaldaðir með n; kemur $n\beta = \alpha$.

Dæmi upp á höfuðsetninguna í þessum tölulið getur verið gömul þula, er vèr höfum, er þannig hljóðar:

Maður gekk inn á hallargólf, hafði í hendi stafi 12, en á hverjum stafnum greinirnar 12, á hverri greininni kvistina 12, á hverjum kvistinum laufin 12, á hverju laufinu æðarnar 12, á hverri æðinni teningana 12, og á hverjum teningnum teningsaugun 12.

Hèr eru veldisstigin $7 = n$, $a = 12 = 2^2 \,.\, 3$, $a^n = 2^{2 \cdot 7} \,.\, 3^{1 \cdot 7} = 2^{14} \,.\, 3^7$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, svo $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} = 2^2 \,.\, 3 = 12$, $a^7 = p_1^{n\beta_1} p_2^{n\beta_2} \,.\, 2^{7 \cdot 2} \,.\, 3^{7 \cdot 1} = 2^{14} \,.\, 3^7$. þetta má á marga vegu útreikna t. a. m. með því að hefja 12 í 7da veldi, $12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 = 35831808$ ellegar $(12 \,.\, 12 \,.\, 12)^2 \,.\, 12$, en $12 \,.\, 12 \,.\, 12 = 1728$; þá $12^7 = 1728^2 \,.\, 12 = 2985984 \,.\, 12 = 35831808$, ellegar $(12 \,.\, 12)^3 \,.\, 12 = 144^3 \,.\, 12 = 2985984 \,.\, 12 = 35831808$, ellegar $12^2 \,.\, 12^3 \,.\, 12^2 = 144 \,.\, 1728 \,.\, 144 = 248832 \,.\, 144 = 35831808$. En þetta má einnig reikna eptir frumgjöröndunum og veldum þeirra $p_1^{n\beta_1}$ og $p_2^{n\beta_2}$, og það á ýmsa vegu þannig: $2^{7 \cdot 2} = (2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2)^2 = 128^2 = 16384$, sem margfaldast á með $p_2^{n\beta_2} = 3^{7 \cdot 1} = 3^7 = 2187 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3$, nefnilega $16384 \,.\, 2187 = 35831808$; hinn fyrri *factorinn* $2^{7 \cdot 2} = 2^{2 \cdot 7} = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 16 \,.\, 16 \,.\, 16 \,.\, 4 = 64 \,.\, 64 \,.\, 4 = 64^2 \,.\, 4 = 4096 \,.\, 4 = 256 \,.\, 64 = (8 \,.\, 8 \,.\, 2)^2$ o. s. frv. Síðari *factorinn* $2187 = (3^3)^2 \,.\, 3 = (3^2)^3 \,.\, 3 = 9 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 3$ o. s. frv. Svo má og blanda *factorana* t. a. m. $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2.\, 3.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 = 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 12$, og margvíslega má setja þetta sundur og saman.

131. þegar tala (N) er fullkomið veldi af fleiri stigum, svo sem n_1, n_2, $n_3 \cdots$ nefnilega

$$N = a_1^{n_1} = a_2^{n_2} = a_3^{n_3} \cdots$$

þá er hún einnig fullkomið veldi þess stigs, sem er minsti samdeilandi *exponentanna* $n_1, n_2, n_3, \cdots$

því $N = a_1^{n_1}$ sýnir, að talan N getur verið í forminu $a_1^{n_1}$, það er: hún getur sundrazt í n_1 jafnstóra gjörendur, og er þá hver þeirra a_1. Með sama hætti sýnir $N = a_2^{n_2}$, að N getur sundrazt í n_2 jafnstóra gjörendur, og þeir sè þá hver fyrir sig a_2, og sama er að segja um öll önnur stig, sem N getur verið veldi af. þegar nú N getur þannig sundrazt í n_1 og undir eins í n_2, $n_3 \cdots$ jafnstóra gjörendur, þá verður hún að vera þannig ásigkomin, að hún geti sundrazt í minni jafnstóra gjörendur, svo marga, að þeir geti flokkað sig í n_1, n_2, n_3 hópa, svo talan N ætíð útkomi. þessara gjöranda fjöldi í N verður því að vera deililegur með $n_1, n_2, n_3 \cdots$, það er með öðrum orðum, að gjörandanna fjöldi verður að minsta kosti að vera minsti samdeilandi talnanna $n_1, n_2, n_3 \cdots$ eptir (129).

Dæmi:

$$1000000 = 1000 \,.\, 1000 = 100 \,.\, 100 \,.\, 100.$$

þar þessi tala getur sundrazt í tvo jafna gjörendur og undir eins í þrjá jafna gjörendur, þá hljóta þessir gjörendur að geta sundrazt í enn minni gjörendur, þannig að þessir síðast nefndu geti flokkað sig í tvo jafna hópa og líka í þrjá jafna hópa. Nú er 6 minsti samdeilandi talnanna 2 og 3, en vèr vitum, að 6 getur flokkazt í tvo jafna hópa, ef 3 eru í hvorum, og líka í 3 jafna hópa, ef 2 eru í hverjum, þannig er þá

$$1000000 = \underbrace{\overbrace{10 \,.\, 10} \,.\, \overbrace{10 \,.}_{}}_{}\!\!\ \underbrace{\overbrace{10 \,.\, 10} \,.\, \overbrace{10}}_{} = 100^3 = 1000^2.$$

Eins er

$$729 = 9^3 = 27^2 \text{ eða } 729 = 9 \,.\, 9 \,.\, 9 = 27 \,.\, 27.$$

Hèr er og 6 minsti samdeilandi talnanna 2 og 3, og 729 = $\overbrace{3 \,.\, 3} \,.\, \overbrace{3 \,.\, 3} \,.\, \overbrace{3 \,.\, 3}$.

Enn framar, þegar m er hvaða tala sem vill, þá er fyrir annað, þriðja og sjötta stig:

$$\begin{aligned} mmmmmm &= (mm)(mm)(mm) = m^{2.3} \\ &= (mmm)(mmm) = m^{3.2} \end{aligned}$$

Sömuleiðis fyrir annað, þriðja, fimta, sjötta, tíunda, fimtánda og þrítugasta stig:

$(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)(mm)\,(mm)\,(mm)$ $(mm)(mm) = (mmm)(mmm)(mmm)(mmm)(mmm)(mmm)(mmm)$ $(mmm)(mmm)(mmm) = (mmmmm)(mmmmm)(mmmmm)(mmmmm)$ $(mmmmm)(mmmmm) = (mmmmmm)(mmmmmm)(mmmmmm)$ $(mmmmmm)(mmmmmm) = (mmmmmmmmmmm)(mmmmmmmmmmm)$ $(mmmmmmmmmmm) = (mmmmmmmmmmmmmmmm)$ $(mmmmmmmmmmmmmmmm)$.

132. Sè stærðin a_1 ekki veldistala í

$$N = a_1^{n_1} = a_2^{n_2} = a_3^{n_3} \cdots\cdots$$

í (131), það er að skilja, ef annaðhvort frumgjörandanna vísar í a_1 eru ósammældir, ellegar a_1 er *ópotenseruð*, eða í svo kölluðu fyrsta veldi, en skal upphefjast í n_1 veldi til að verða $= N$, og N á að vera fullkomið veldi af ýmsum stigum (131), svo sem n_1, n_2, $n_3 \cdots\cdots$, þá verður n_1 deililegt með n_2, $n_3 \cdots\cdots$, og a_2 og a_3 verða þá veldistölur, sem upphafðar til ýmsra velda verða $= N$.

Því þar frumgjörendurnir í a_1 hafa ósammælda vísa, og a_1 þarf að *potenserast* með n_1 til að verða $= N$, þá verður a_1 í fyrstunni að vera *ópotenseruð* tala (130) og þess vegna hin minsta talan, sem verður *potenseruð* í N, þá verður hún að vera eining samdeilanda veldisstiganna, og sama sem m í (131). Hún hlýtur því að *potenserast* með stærstum *exponent*, eða með tölu, sem er minsti samdeilandi talnanna n_1, n_2, $n_3 \cdots\cdots$, og n_1 verður þá hinn minsti samdeilandi þeirra sjálfur, en hinir *exponentarnir* n_2, $n_3 \cdots\cdots$ verða því að ganga upp í honum eða vera mælar hans. Hèr af leiðir þá aptur, að tölurnar a_2 og $a_3 \cdots\cdots$, sem einungis *potenserast* með mælunum til að verða $= N = a_1^{n_1}$, verða að vera veldistölur, til að eiga eins og skemra í land til að verða $= N$; þær verða nefnilega að vera á borð við $(mmm \cdots\cdots)$ í tölulið (131). Með bókstöfum má þetta þannig tákna:

$$N = a_1^{n_1} = a_2^{n_2} = a_3^{n_3} \cdots\cdots$$
$$= (a^{\alpha_1})^{n_1} = (a^{\alpha_2})^{n_2} = (a^{\alpha_3})^{n_3} \cdots\cdots$$

Setjum nú $\alpha_1 = 1$; til að tákna a_1 sè *ópotenseruð* tala, þá má setja a_1 í staðinn fyrir öll a, sem hèr eru án *index;* þá verður

$$N = a_1^{n_1} = (a_1^{\alpha_2})^{n_2} = (a_1^{\alpha_3})^{n_3} \cdots\cdots$$

Hèr er a_1 sama sem a_1^1 eða eining veldisstiganna, og undir

eins sama sem m í (131); þar á móti er $a_1^{\alpha_2}, a_1^{\alpha_3} \cdots$ sama sem $(mmm \cdots)$ í (131). Hèr sèst og, að

$$n_1 = \alpha_2 n_2 = \alpha_3 n_3 \cdots$$

það boðar, að n_1 sè deilileg með $n_2, n_3 \cdots$, og sè veldisstiganna minsti sámdeilandi. Sè nú ekki a_1 eða hin *ópotenseraða* tala gefin, þá hlýtur hún þó ætíð til að vera, því veldisstiganna samdeilandi getur ekki staðizt án þess hann hafi einingu, og einingin er a_1 eða m. það getur verið, að a_1 sè ekki samsett af ýmislegum frumtölum, svo ei sjáist, að frumtalnanna vísar sè ósammældir, en þá hlýtur samt kunnugt vera, hvort það er *potenseruð* tala eða fyrsta veldi. Sè hún *potenseruð*, þá má hún ekki vera a_1, heldur verður að leita að annari tölu, er geti verið a_1, og fengið hinn stærsta *exponent* n_1 í tölunni N.

133. þegar teljari og nefnari brots $\frac{a}{b}$ eru frumtölur sín á milli, þá er brotið óstyttanlegt eða frumbrot (á dönsku: irreducibel Brök = Primbrök); þá geta menn ekki sett neinar minni tölur í stað teljara og nefnara, án þess brotsins gildi raskist.

því af (85) sèst, að stytta má brot með sammæli teljara og nefnara, þegar nýi teljarinn verður eins mörgum sinnum minni en gamli teljarinn, sem nýi nefnarinn er mörgum sinnum minni en gamli nefnarinn. það er með öðrum orðum, að teljari og nefnari hafi sammæli, sem gangi upp í báðum, án þess hann sè $= 1$. En hèr viljum vèr skoða, hvort ekki megi einnig stytta brot án sammælis. Látum hið gefna brot vera $\frac{a}{b}$, en hið nýja $\frac{m}{n}$, þannig að sè

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

og m og n sè heilar tölur, en a og b frumtölur sín á milli. Margföldum vèr

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

með b, þá fæst

$$a = \frac{bm}{n}$$

margfaldist þetta aptur með n, kemur

$$an = bm$$

þess vegna: Hver sú tala, sem gengur upp í an, gengur einnig upp í bm, og aptur á móti, hver tala, sem gengur upp í bm, gengur líka upp í an. þess vegna er bm deililegt með a, undir eins og það er deililegt með b. Enn framar: þar bm er eptir þessu deililegt bæði með a og með b, þá er það einnig deililegt með ab, sem er minsti samdeilandi talnanna a og b (129), þar þær eru frumtölur sín á milli, eins og gefið er (116). Með þessu móti verður þá:

$$\frac{bm}{ab} \text{ heil tala,}$$

og þar $bm = an$, þá er

$$\frac{bm}{ab} = \frac{an}{ab}$$

ein og hin sama heila talan, nefnilega

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \text{heil tala.}$$

þessi brot eru þá launbrot (80), og teljararnir eru þá annaðhvort jafnir nefnurum sínum, eða stærri en þeir. Í fyrra tilfellinu verður brotið $\frac{a}{b}$ ekki stytt, því nýja brotið $\frac{m}{n}$ hefir sömu tölurnar sem $\frac{a}{b}$; og í síðara tilfellinu verður $\frac{a}{b}$ heldur ekki stytt, heldur þvert á móti lengt, því tölur nýja brotsins $\frac{m}{n}$ eru þá *multipla* talnanna í brotinu $\frac{a}{b}$. Hèr með er þá sannað, að $\frac{a}{b}$ er óstyttanlegt, ef það hefir ekki sammæli annan en 1.

134. þegar tala p er ósammæld fleirum öðrum $q, r, s\ldots$, þá gengur hún ekki upp í framkvæmi þeirra $qrs\ldots$

þessi setning er að mestu leyti hin sama sem (128), en hèr viljum vèr skoða það efni betur.

Leysum nú allar tölurnar upp í þeirra frumgjörendur

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots, \quad q = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots, \quad r = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \ldots$$
$$s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \ldots$$

þá má tákna deilinguna þannig:

$$\frac{(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots)(r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \ldots)(s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \ldots)}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots}$$

þar talan p er ósammæld $q, r, s, \cdots$ þá ganga frumtölurnar í p, svo sem p_1, ekki upp í neinum frumgjöranda deilandans, þess vegna ekki í framkvæmi þeirra eða deilanda sjálfum $qrs\cdots$ (117), og þar frumtalan p_1 gjörir það ekki, þá gengur framkvæmi allra frumtalna í p, sem er p sjálft, ekki upp í $qrs\cdots$ því þegar deilingin með p_1 gefur brot af sèr, þá hverfur það brot ekki í burtu, þegar aptur skal deila þeim brotna eða blandna kvóta með p_2, því af deilingareðli brota eða blandinna talna með heilli tölu skilst, að brotið hverfur ekki, heldur deilist að nýju (98, 1, 2). En af (58*) er ljóst, að með öllum gjöröndum deilis á að deila.

135. þegar ein tala ekki gengur upp í annari, þá má álíta sem það komi af ýmislegleika frumtalna þeirra, ellegar einhverra frumtalna of háu veldum í *divisor*.

Ýmisleiki frumtalnanna getur táknazt með ýmislegum bókstöfum, líkt og (63), (er þá ekki nauðsynlegt að greina þær með *indexum*). Sè allar frumtölur deilis og deilanda ýmislegar, þá gengur deilir ekki upp í deilanda (134). Nú kunna sumar frumtölurnar deilis að vera sömu sem í deilanda, þó sumar sè ýmislegar, en þá eru þeir sammældir. þá má burt-*dividera* jafnháum veldum úr báðum þeim, svo háum sem verður. Sè þá *exponentinn* jafnstór í deili sem deilanda, þá hverfur sú frumtala burt úr báðum, en hinar ósameiginlegu halda sèr, og gjöra það að verkum, að deilir gengur ekki upp í deilanda. Sè nú *exponent* hinnar sameiginlegu frumtölu stærri í deilanda en deili, þá má láta hina sameiginlegu frumtölu hverfa úr deili (63), en hinar ósameiginlegu halda sèr fyrir það, og deilir gengur ekki upp í deilanda vegna þeirra. En hafi hinar ósameiginlegu engar verið, þá gengur upp. Sè nú loksins *exponent* sameiginlegu frumtölunnar minni í deilanda en í deili, þá má láta hana hverfa úr deilanda, en hún heldur sèr þá í deili með lækkuðum *exponent*, og er hún þá ekki sameiginleg frumtala lengur, og gjörir hún það að verkum, að deilir ekki gengur upp í deilanda, hvört sem nokkrar aðrar ósameiginlegar frumtölur voru til eður ekki. þannig er það undir frumtölunum komið og þeirra veldum, hvort deilir gengur upp í deilanda eða ekki. Svo þegar ekki uppgengur, þá er það af hinum ósameiginlegu frumtölum ellegar af ofháum *exponentum* hinna sameiginlegu í deili. Sè þá hinum sameiginlega mæli burtvarpað með deilingu, þá verða deilir og

deilandi ósammældir. Þar af leiðir, að þegar deilir gengur ekki upp í deilanda, þá eru þeir ósammældir ellegar verða gjörðir ósammældir með deilingu, er lætur hinn sameiginlega mæli hverfa.

Að stærri tala gengur ekki upp í minni tölu, er alkunnugt frá brotunum, þar brot myndast úr leifunum, sem minni eru en *divisor* (57); kemur þá ekki til skoðunar, hvort tölunar eru sammældar eða ekki. Samt má einnig heimfæra það tilfelli til nærveranda (135) töluliðs, því auðvitað er, að annaðhvort eru allar frumtölurnar ýmislegar, og að þá gengur ekki upp, ellegar að einhver frumtalan í *divisor* hefir hærri *exponent* heldur en í *dividendus*, og þegar hún er látin hverfa úr *dividendus*, verða deilir og deilandi ósammældir, svo þá má álíta þetta tilfelli heyra undir (134). Þegar því minni tala skal deilast með stærri, þá eru tölurnar annaðhvort ósammældar, ellegar verða gjörðar ósammældar með deilingu, er lætur hinn sameiginlega mæli hverfa.

136. Setningin (133) má nú einnig sannast af (134) þannig: Ef a og b eru frumtölur sín á milli, þá getur ekki verið

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

þannig að sè $m < a$, og $n < b$, því þar af leiddi

$$m = \frac{an}{b}$$

nefnilega: b gengi upp í an, svo m yrði heil tala. En það mótmælir (134); því hèr er gefið, að talan b sè ósammæld a, og b sè stærri en n, þess vegna þær tölur einnig ósammældar, að minsta kosti eptir burtvarp sammælis (135). Þá leiðir þar af eptir (134), að b eða *factor* þar úr (annar en 1) gengur ekki upp í framkvæminu an, og m getur ekki orðið heil tala.

137. Tala, sem er mælir *divisors* d og *dividendi* D, er einnig mælir leifanna r. Sömuleiðis:

Tala, sem er mælir *divisors* d og leifanna r, er einnig mælir *dividendi* D.

Hið fyrra leiðir af (58, 12).

Residuum = *dividendus* — *divisor* × *quotiens*, það er:

$$r = D - qd$$

Þegar tala gengur upp í d, þá gengur hún einnig upp í qd eptir (105, 3), og þegar hún einnig gengur upp í D, þá gengur hún einnig upp í mismuninum $D - qd$ (105, 1), sem er $= r$.

Hið síðara sannast með sama hætti af (58, 8).

Dividendus = *divisor* $\times$ *quotiens* + *residuum*, það er:

$$D = qd + r$$

þegar tala gengur upp í d, þá gengur hún einnig upp í qd eptir (105, 3), og þegar hún einnig gengur upp í r, þá gengur hún og upp í summunni $qd + r$ (105, 1), sem er D.

138. Að finna stærsta sammæli handa tveimur tölum, hinni stærri p, og minni q (eða til betri samhljóðunar: minni p_0). þetta verkefni er áður framsett (88), en sönnunina vantar þar.

Úrlausn. Deil stærri tölunni p með hinni minni p_0; verði afgangur p_1, þá deil með honum hinum þá viðhafða deili p_0, og síðan hverjum *divisor* p_{r-1} með hans afgangi p_r. Kvótarnir geta táknazt með a og sama *index* sem *divisorar* þeirra. þessu sè framhaldið, unz enginn afgangur verður; er þá hinn síðasti *divisor* p_m stærstur sammælir fyrirlagðra talna. þá verður:

$$\begin{array}{lcll}
p & = & a_0 p_0 & + p_1 \\
p_0 & = & a_1 p_1 & + p_2 \\
p_1 & = & a_2 p_2 & + p_3 \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
p_{r-1} & = & a_r p_r & + p_{r+1} \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
p_{m-2} & = & a_{m-1} p_{m-1} & + p_m \\
p_{m-1} & = & a_m p_m & + 0
\end{array}$$

Hèr sèst, að tala, sem er mælir tveggja næstu talna p, p_0, p_1, p_2 .... verður mælir allra í sömu röð. því mælir p og p_0 er mælir p_1 eptir (137), og aptur mælir p_0 og p_1 er mælir p_2, og svo koll af kolli. þess vegna verður p_m, sem er mælir p_{m-1} og sjálfs síns p_m, að vera mælir talnanna p og q eða sem hèr kallast p og p_0. Talan p_m er undir eins stærsti sammælir þessara talna, því væri nokkur tala stærri en p_m mælir talnanna p og q, yrði hún einnig að ganga upp í p_m; en þetta er ómögulegt, þar engin tala getur gengið upp í annari, sem er minni. það er stundum, að p_m verður = 1, og boðar það, að p og q sè frumtölur sín á milli. Samber (114).

Athugi. Í þessum tölulið er að mestu fylgt framsetningarhætti *prof. Ramusar.* Honum er einnig fylgt víða í þessari bók.

Dæmi. Vèr viljum eptir framsettri reglu finna stærsta sammæli talnanna 168495 $= p$, og 19035 $= q = p_0$.

$p_0 =$ 19035) 168495 (8 $= a_0$

152280

$p_1 =$ 16215) 19035 (1 $= a_1$

16215

$p_2 =$ 2820) 16215 (5 $= a_2$

14100

$p_3 =$ 2115) 2820 (1 $= a_3$

2115

$p_m = p_4 =$ 705) 2115 (3 $= a_4 = a_m$

2115

$p_5 =$ 0

Þar eð 5[ta] leifin verður hèr $= 0$, þá er 705 eða 4[ða] leifin $p_4 = p_m$ stærsti sammælir gefinna talna.

Eptir reglunni (122, 2) yrði stærsti sammælir þessara talna þannig fundinn, ásamt sjálfri uppleysingu þeirra í frumgjörendur (113).

3)	19035	3)	168495
3)	6345	5)	56165
3)	2115	47)	11233
3)	705		239
5)	235		
	47		

$$19035 = 3^4 \,.\, 5 \,.\, 47. \qquad 168495 = 3 \,.\, 5 \,.\, 47 \,.\, 239.$$

Nú eiga þeir frumgjörendur, sem finnast í þeim báðum, að setjast í hið lægsta veldi, sem þeir hafa í þeim. Frumgjörendurnir eru:

$$3 \quad 5 \quad 47 \quad 239$$

og settir í hin lægstu veldi

$$3^1 \,.\, 5^1 \,.\, 47^1 \,.\, 239^0 = 3 \,.\, 5 \,.\, 47 \,.\, 1 = 15 \,.\, 47 = 705$$

og kemur þetta heim við hina aðferðina.

139. Stytta má aðferðina (138) nokkuð með fyllitölu, þegar nefnilega afgangur p_{r+1} verður meiri en helmingur deilis hans

p_r, með því að draga afganginn frá deili, og deila svo deili p_r með fyllitölunni $p_r - p_{r+1}$ (þenna mismun kallar Ólafur Olavius fyllitölu í sinni vegleiðslu til talnalistarinnar, bls. 190).

Ofanskrifað dæmi reiknast þannig með fyllitölum:

```
          19035) 168495 (8
                 152280
                 ------
                  16215
                  19035
                 ------
Fyllitala         2820) 19035 (6
                        16920
                        -----
                         2115
                         2820
                        -----
            Fyllitala     705) 2820 (4
                               2820
                               ----
                                 0.
```

Þetta leiðir af því, að stærsti sammælir talnanna 19035 og 168495 mælir afganginn 16215 eptir (137). En mælir deilis og afgangsins er og mælir þeirra mismunar (103, 1), hann er nefnilega mælir fyllitölunnar. Þar má því deila hennar deili með henni, og hvenær sem afgangur verður meiri en helmingur deilis, má taka fyllitölu að nýju.

Annað er og, sem stytt getur hina umtöluðu reikningsaðferð, og er það þetta: Sjáist, að p_{r-1} og p_r hafi sammæli n, má varpa honum burt og finna síðan stærsta sammæli handa $\frac{p_{r-1}}{n}$ og $\frac{p_r}{n}$; hann verður þá $\frac{p_m}{n}$, og er þá hægt að finna p_m með því að margfalda hann með n. Því þar verða allir liðirnir í röðinni frá p_{r-1} ummyndaðir í $\frac{p_{r-1}}{n}$, $\frac{p_r}{n}$, $\frac{p_{r+1}}{n}$.... en kvótarnir a_r, a_{r+1} ...., a_m breytast ekki.

Í ofanskrifuðu dæmi sjáum vér strax, að báðar gefnu tölurnar eru deililegar með 3 og 5 eptir deilileikseinkunnunum (86, 2, 4), og þess vegna með 15, þar 3 og 5 eru frumtölur. Þá má deila báðum gefnu tölunum með 15, verða þá allar tölurnar í röðinni 15 sinnum minni:

$$\frac{p_0}{15} = 1269)\ 11233\ (8 = a_0$$
$$10152$$
$$\frac{p_1}{15} = 1081)\ 1269\ (1 = a_1$$
$$1081$$
$$\frac{p_2}{15} = 188)\ 1081\ (5 = a_2$$
$$940$$
$$\frac{p_3}{15} = 141)\ 188\ (1 = a_3$$
$$141$$
$$\frac{p_4}{15} = 47)\ 141\ (3 = a_4 = a_m$$
$$141$$
$$\frac{p_5}{15} = 0.$$

Loksins margfaldast 47 með 15, kemur 705, sem er hinn eptirleitaði stærsti sammælir.

140. Sèrhver tala N verður sett í eptirfylgjandi 3 myndir:

$$\begin{aligned} N &= b + b_1A^t + b_2A^{2t} + b_3A^{3t} \ldots\ldots \quad \mathrm{I.} \\ &= b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots + b_1(A^t - 1) + b_2(A^{2t} - 1) \\ &\qquad + b_3(A^{3t} - 1) + \cdots\cdots \quad \mathrm{II.} \\ &= b - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + b_1(A^t + 1) + b_2(A^{2t} - 1) \\ &\qquad + b^3(A^{3t} + 1) + \cdots\cdots \quad \mathrm{III.} \end{aligned}$$

og má skera hana (töluna N) í stuðla, með t stöfum í hverjum frá hægri hendi til vinstri. Stafaþýðingu og sönnun viljum vèr framsetja smámsaman í eptirfylgjandi töluliðum.

141. Fyrst er að hugleiða Itu myndina:

$$N = b + b_1A^t + b_2A^{2t} + b_3A^{3t} \ldots\ldots \quad I.$$

Í tugakerfinu (*decadikinni*) þýðir A umferðina, sem er 10, samber (9); þess vegna er í því kerfi

$$N = b + b_1 10^t + b_2 10^{2t} + b_3 10^{3t} \ldots\ldots$$

Látum vèr nú 1° vera $t = 1$, þá er talan í sinni venjulegu mynd, nefnilega:

$$N = b + b_1 10 + b_2 10^{2 \cdot 1} + b_3 10^{3 \cdot 1} \ldots \text{ samber (9).}$$

það er

$$N = b + b_1 10 + b_2 100 + b_3 1000 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

þá er b einingastafurinn, b_1 tugastafurinn, b_2 hundraðastafurinn, b_3 þúsundastafurinn o. s. frv.

Nú sjáum vèr, að 10 gengur upp í $b_1 10$, $b_2 100$, $b_3 1000$ o. s. frv. (103, 3); þess vegna gengur 10 upp í N, ef sú tala gengur upp í einingastafnum b, eptir (103, 1). En það gjörir 10 ekki, nema með því móti, að sè $b = 0$; því stærri tala, sem hèr er 10, gengur aldrei upp í minni tölu, sem hèr er einingastafurinn. Sè því einingastafurinn ekki $= 0$, þá verður hann *residuum minimum* eða minstu leifar tölunnar N eptir *modulus* 10, samber (104), nefnilega:

$$N \equiv b \ (mod.\ 10)$$

og sè $b = 0$, þá verður

$$N \equiv 0 \ (mod.\ 10),$$

það segir, að 10 gangi upp í N, ef einingastafurinn er 0. Hèr með er þá sönnuð deilileikseinkunn tölunnar 10, er var framsett án sönnunar í töluliðð (86, 8). En hèr af sprettur þá einnig sönnunin fyrir deilileikseinkunnunum talnanna 2 og 5, þar tölur, sem eru samsvarandi eptir vissum *modulus*, eru það einnig eptir mælum hans (108). Hèr verður þá:

$$N \equiv b \ (mod.\ 2,\ 5,\ 10)$$

t. d. sè

$$N = 3456789,$$

sem má skera þannig í stuðla eptir áðursögðu, þegar $t = 1$

$$N = 3|4|5|6|7|8|9$$
$$b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b$$

og $N \equiv 9 \ (mod.\ 10)$. Þá verður einnig eptir (108)

$$N \equiv 9 \ (mod.\ 5),$$

þó 9 sè þá ekki minstu leifar, heldur 4, nefnilega

$$N \equiv 4 \ (mod.\ 5).$$

Þessar minstu leifar 4 finnast með því, að draga *modulus* 5 frá 9 eptir (104), ellegar með því, að deila 9 með 5, því þá verður afgangurinn $= 4$. Að talan $N = 3456789$ hafi einnig leifarnar 4, þegar henni er deilt með 5, finst með deilingu; þess vegna samsvarar hún einnig 4.

Með líkum hætti má finna:

$$N \equiv b \ (mod.\ 2)$$

eða

$$N \equiv 9 \ (mod.\ 2)$$

þó 9 sè ekki minsta leif; en hina minstu leif má finna, með því að draga *modulus* 2 fjórum sinnum frá 9, nefnilega:

$$9 - 2 - 2 - 2 - 2 = 9 - 8 = 1,$$

ellegar deila 9 með *modulus* 2, verður þá afgangur $= 1$. Sè þá líka tölunni $N = 3456789$ deilt með 2, þá verður afgangurinn $= 1$, og talan er oddatala og *congruentian* sönn, nefnilega:

$$3456789 \equiv 1 \ (mod.\ 2).$$

Mælarnir í A^t kallast f_t, og þegar $t = 1$, eða þegar einn tölustafur er hafður í stuðli, verður f_1 almenn táknun fyrir mælana í 10, nefnilega 2, 5, 10, svo *congruentian* þeirra verður

$$N \equiv b \ (mod.\ f_1).$$

2°. Látum vèr nú vera 2 stafi í stuðli hverjum, þá er $t = 2$, og skoðum sömu töluna; þá sundrast hún þannig:

$$N = \underset{b_3}{3}|\underset{b_2}{45}|\underset{b_1}{67}|\underset{b}{89}$$

Þá heita *moduli* f_2, og N leysist upp þannig:

$$\begin{aligned} b &= 89 \\ b_1 10^{1\cdot 2} = b_1 10^2 &= 6700 \\ b_2 10^{2\cdot 2} = b_2 10^4 &= 450000 \\ b_3 10^{3\cdot 2} = b_3 10^6 &= 3000000; \end{aligned}$$

b_1 er nú ekki lengur tugastafur, heldur hundraðastuðull; b_2 er tíuþúsundastuðull, og b_3 er milliónastuðull. Þegar þetta er lagt saman aptur, kemur talan N fram í þessum *addendis:*

$$N = 3000000 + 450000 + 6700 + 89.$$

Allar tölur, sem ganga upp í 100, ganga hèr upp í $b_1 10^2 = 6700$, eptir (103, 3), upp í $b_2 10^4 = 450000$, og upp í $b_3 10^6 = 3000000$. Það er þá eptir að vita, hvort þær einnig ganga upp í b, sem í þessari tölu er $= 89$, gjöri þær það, þá ganga þær einnig upp í tölunni N eptir (103, 1); gjöri þær það ekki, þá verður b, sem í þessari tölu er $= 89$, *residuum* þeirra eða leifar. Þess vegna verður við 3456789

$$N \equiv 89 \ (mod.\ f_2);$$

er þá komin deilileikseinkunn fyrir allar tölur, sem ganga upp í 100 eptir (108) og heita f_2, en þær eru þessar:

$$f_2 = 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100,$$

og hljóðar hún þannig:

$$N \equiv b \ (mod.\ f_2)$$

til dæmis fyrir *modulus* 25, og töluna 3456789, þá er

$$N = 3456789 \equiv 89 \ (mod.\ 25)$$

$$\left.\begin{array}{l}\equiv 64 \ (mod.\ 25)\\ \equiv 39 \ (mod.\ 25)\\ \equiv 14 \ (mod.\ 25)\end{array}\right\}\ \text{með því að draga } modulus \text{ frá, eða deila 89 með } modulus \text{ 25, og hirða afganginn.}$$

Sama *residuum minimum* 14 kemur fram, ef deilt er 3456789 og 89 með 25, sem hægt er að reyna.

3°. Með líkum hætti má láta vera svo marga stafi í stuðli, sem vill; verður þá eptir því

$$t = 3, 4, 5, 6 \cdots$$

og *modulus* 10^t og mælar hans, er þá heita:

$$f_3\ f_4\ f_5\ f_6 \cdots\cdots$$

þessa má, ef til vill, alla finna eptir (121), með því að leysa 10^t upp í sína frum*factora*, og margfalda síðan *factora*summurnar úr hverju einstöku frumtöluveldi t. a. m. ef $t = 3$, þá er $10^t = 10^3 = 1000 = 2^3 . 5^3$, þá gefur

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2 + 5^3)$$

margfaldað saman, þó án samlagningar, alla mælana í 1000, sem þá heita f_3, og samsvaranin verður

$$N \equiv b \ (mod.\ f_3).$$

142. Nú viljum vèr skoða hina aðra mynd II. (140).

$$N = b + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_1(10^t - 1) + b_2(10^{2t} - 1) + b_3(10^{3t} - 1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eins og mátti setja allar tölur í hina fyrstu mynd I (140) eða (141), eins má einnig setja þær í þessa aðra, því

$$b_1(10^t - 1) = b_1 10^t - b_1.$$

Hèr er þá eitt b_1 tekið burt úr $b_1 10^t$, sem var annar liður í fyrri myndinni; en til að láta ekki töluna N raskast við það, er það uppbætt aptur með því að setja $+ b_1$ fyrir framan. Eins er farið með alla eptirfylgjandi liði, því

$$b_2(10^{2t} - 1) = b_2 10^{2t} - b_2$$

nefnilega, $- b_2$ er bætt upp aptur með $+ b_2$ fyrir framan. þessum undandregnu $b$um er öllum safnað saman fyrir framan, og verður úr þeim nokkurs konar þversumma, nefnilega:

$$b + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \cdots\cdots\cdots$$

En þessi þversumma hefir víðari merkingu en þversumman fyrir

3 og 9 (86, 2, 7), þetta er þversumma af stuðlum, en ekki einungis af einstökum tölustöfum.

Þannig er þá auðsætt, að talan N skekkist ekkert við það, þó hún komist í þessa aðra mynd; en nú er eptir að sjá, hvernig á að nota sèr hana, og er það fljótsagt, því það er öldungis eins og við hina fyrstu, því það verður sannað, að stærðin $(10^t - 1)$ gengur upp í $(10^{2t} - 1)$, upp í $(10^{3t} - 1)$, upp í $(10^{4t} - 1)$ $\cdots\cdot (10^{nt} - 1)$, hvað margir sem þessir liðir eru. Stærðin $(10^t - 1)$ gengur þá upp í allri tölunni N, ef hún þá einnig gengur upp í $b + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \cdots\cdot$, en að öðrum kosti verður þetta hennar *residuum;* þess vegna verður ætíð:

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdot (mod.\ 10^t - 1)$$

og ekki einungis þetta, heldur verða allir mælar stærðarinnar $(10^t - 1)$ að *modulum* (108), sem vèr (eins og *prof. Ramus*) köllum g_t. Þess vegna:

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdot (mod.\ g_t).$$

Að $(10^t - 1)$ gengur upp í $(10^{nt} - 1)$, hvaða tala sem n er (hèr er n sætistala hvers stuðuls í tölunni N, byrjuð á 2um stuðli og talin frá hægri hendi), það má finna þannig:

$$\frac{10^{nt} - 1}{10^t - 1} = \frac{(10^t)^n - 1}{10^t - 1}.$$

Setjum nú $10^t = x$, fæst stærðin $\frac{x^n - 1}{x - 1}$. En af (64, *serie A*), þegar þar er sett $a = 1$, sèst, að sú *series* er ætíð endanleg og deilingin gengur upp. Þar verður þá

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \cdots\cdot + x + 1.$$

Vilji eg nú reyna, hvort $10^t - 1$ gengur upp t. a. m. í þriðja lið b_3 $(10^{3t} - 1)$, sem hefir b_3 eða 4ða stuðul tölunnar N frá hægri hendi talinn fyrir *multiplicator,* þá set eg $n = 3$, verður þá

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

ellegar

$$\frac{10^{3t} - 1}{10^t - 1} = 10^{2t} + 10^t + 1;$$

er þá ljóst, að $10^t - 1$ gengur upp í $10^{st} - 1$. Sama kæmi og fram, þó reynt væri með deilingu.

Til að nota hina fundnu samsvaran

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdot (mod.\ 10^t - 1)$$

ellegar $\equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdot (mod.\ g_t)$

reynum vèr ofanskrifaða tölu

$$N = 3456789$$

og látum 1 staf vera í stuðli

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b \end{array}$$

er þá $t = 1$, og $10^t - 1 = 10 - 1 = 9$, þá verður

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6\ (mod.\ 9).$$
$$\equiv 42\ (mod.\ 9).$$
$$\equiv 6\ (mod.\ 9).$$

Hèr deili eg leifinni 42 með *modulus* 9, og fæ minstu leif 6. Hèr er þá komin deilileikseinkunnin tölunnar 9, nefnilega: 9 gengur upp í N, ef 9 gengur upp í þversummunni (86, 7). Eins yrði það, ef tölunni 3456789 væri deilt með 9, þá yrði afgangurinn 6. Enn framar: $g_t = g_1 = 3$ og 9; þá

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6\ (mod.\ 3)$$ eptir (108).

$$\equiv 42\ (mod.\ 3)$$ eptir (108), því 3 er mælir tölunnar 9.

$$\equiv 0\ (mod.\ 3).$$

Þetta *residuum minimum* 0 fæst með því að deila 42 með *modulus* 3, því þá verður afgangurinn $= 0$; eins verður afgangurinn $= 0$, ef deilt er 3456789 með 3, svo 3 ganga upp í tölunni N. Hèr með er þá fundin deilileikseinkunnin tölunnar 3, nefnilega: með 3 má deila öllum þeim tölum, er þversumma þeirra er deilileg með 3. Þversumman var í þessari tölu 42. Samber (86, 2).

Nú viljum vèr reyna hina fundnu samsvaran

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdot (mod.\ 10^t - 1)$$

og láta 2 stafi vera í stuðli; þá verður $t = 2$, $10^t - 1 = 10^2 - 1 = 100 - 1 = 99$. Samsvaranin verður þá svona:

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdot (mod.\ 99).$$

Heimfærum vèr þetta upp á sömu töluna

$$N = 3456789$$

verður hún þá svona skorin:

$$\begin{array}{l|l|l|l} 3 & 45 & 67 & 89 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b \end{array}$$

og samsvaranin

$$N = 3456789 \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \ (mod.\ 99).$$

Hèr er þá komin deilileikseinkunn fyrir 99, er þannig hljóðar: 99 ganga upp í tölunni, ef stuðlaþversumman, með 2 stöfum í stuðli, töldum frá hægri hendi, er deilileg með 99; annars gefur N sömu leifar sem stuðlaþversumman deild með 99. Stuðlaþversumma þessi í tölunni 3456789 finst þannig:

$$\begin{aligned} b &= 89 \\ b_1 &= 67 \\ b_2 &= 45 \\ b_3 &= 3 \\ \hline & 204. \end{aligned}$$

Þá $3456789 \equiv 204 \ (mod.\ 99)$.

Deili eg nú 204 með *modulus* 99 til að fá minstu leif, verður afgangurinn 6. Þess vegna

$$3456789 \equiv 6 \ (mod.\ 99).$$

Deili eg nú 3456789 með 99, þá verður kvótinn 34917, og afgangurinn 6. Skoði eg nú mælana g_2, þá eru þeir:

3, 9, 11, 33, 99.

Tökum vèr nú 11, þá verður eptir (108), þar 11 mælir 99,

$$3456789 \equiv 6 \ (mod.\ 11).$$

Það segir: 11 gengur ekki upp í 3456789, heldur verður afgangurinn 6. Þetta er og minsta leif, þar 6 er minna en *modulus* 11. Samber (104). Sama finst með því að deila 3456789 með 11, því kvótinn verður 314253, og afgangurinn 6. Þetta kemur saman við fyrri deilileikseinkunnina með 11 í (86, 9).

Loksins viljum vèr í þessari annari mynd talnanna láta 3 stafi vera í stuðli. Þá verður $t = 3$, $10^t - 1 = 10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999$, og samsvaranin lítur svo út:

$$N \equiv b + b_1 + b_2 \ (mod.\ 999).$$

Heimfærum vèr þetta upp á ofanskrifaða tölu og skerum hana þannig í stuðla

$$\begin{array}{l|l|l} 3 & 4\,5\,6 & 7\,8\,9 \\ b_2 & b_1 & b\,, \end{array}$$

þá verður

$$\begin{array}{rcl} b & = & 789 \\ b_1 & = & 456 \\ b_2 & = & 3 \\ \hline b+b_1+b_2 & = & 1248 \end{array} \qquad \text{og } N = 3456789.$$

þá er

$$3456789 \equiv 1248 \ (mod.\ 999).$$

Deili eg 1248 með *modulus* 999, og hirði afganginn, fæ eg minstu leif 249, þá er:

$$3456789 \equiv 249 \ (mod.\ 999).$$

Mælarnir g_i í 999 eru þessir:

$$3,\ 9,\ 27,\ 37,\ 111,\ 333,\ 999.$$

Vilji eg nú finna deilileikseinkunn fyrir 37, þá verður hún við allar tölur N.

$$N \equiv b + b_1 + b_2 + b_3 \cdots\cdots (mod.\ 37)$$

og hljóðar þannig:

Gangi 37 upp í summu hinna þrístöfuðu stuðla frá hægri hendi til vinstri, þá gengur 37 einnig upp í N, en að öðrum kosti gefur N sömu leifar sem þessi stuðlaþversumma. Samber (86, 12).

Fyrir $N = 3456789$ er stuðlaþversumman fundin $= 1248$; þess vegna er

$3456789 \equiv 1248$ (*mod.* 37) eptir (108), þar 37 mælir 999, en til að fá minstu leif, deili eg 1248 með *modulus* 37, fæ kvótann 33, og afganginn 27; þess vegna:

$$3456789 \equiv 27 \ (mod.\ 37).$$

Þetta segir: 37 ganga ekki upp í 3456789, heldur verður afgangur 27. Sama reyndist, ef deilt væri 3456789 með 37.

143. Nú komum vèr til hinnar þriðju myndar III, (140).

$$N = b - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots\cdots + b_1(10^t + 1) + b_2(10^{2t} - 1) + b_3(10^{3t} + 1) + \cdots\cdots$$

Hèr er $b_1(10^t + 1) = b_1 10^t + b_1$; þess vegna b_1 oftalið í þessum lið; þá verður að draga það frá, eða setja *negatift* í þversummuna, og þannig er við alla ójafna liði, sem eru með ójöfnum *exponentum*. Þar á móti í $b_2(10^{2t} - 1)$, og öllum jöfnum liðum er b_n vantalið; þess vegna verður að bæta þá upp í þversummunni með *addition* eða+. En hvers vegna mátti hèr ekki í öllum liðunum vera $(10^t)^n + 1$? Svarast: af því $10^t + 1$ gengur ekki upp í $(10^t)^n + 1$, nema ef n er oddatala. Setjum vèr nú $10^t = x$, þá

verður $(10^t)^n + 1 = x^n + 1$; en eptir (64, *serie B)* er, þegar n er oddatala,

$$\frac{x^n + 1}{x + 1} = x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} \ldots\ldots - x + 1;$$

þar á móti, þegar n er jöfn tala, verður

$$\frac{x^{n-1}}{x+1} = x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} \ldots\ldots\ldots + x - 1.$$

En af (65) má sjá, að ef frá þessu er vikið, þá kemur brot. Það verður því að hafa — í öllum jöfnum liðum, eða þar sem t hefir jafnan *coëfficient*, til þess að $x + 1$ gangi upp í öllum liðunum og að þversumman, sem hèr má kallast þvermismunur, geti orðið *residuum* í tölunni N.

Dæmi: Sama tala og $t = 3$

$$\begin{array}{l|l|l} 3 & 456 & 789 \\ b_2 & b_1 & b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3|456|789 \\ +3 = b_2 \\ \hline 792 \\ -\ 456 = b_1 \\ \hline +\ 336 \end{array}$$

$10^t + 1 = 10^3 + 1 = 1000 + 1 = 1001 = h_3$.

Þá: $3456789 \equiv 336$ (*mod.* 1001).

Modulana í þessari 3ju mynd köllum vèr h_t. Þeir verða:

$h_1 = 11 = 10^1 + 1$

$h_2 = 101 = 10^2 + 1$

$h_3 = 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.$

Allir þessir *modular* h_3 finnast með því, að leysa þann, sem fyrst framkemur, $10^3 + 1 = 1001$ (og sem mætti kallast frum-*modulus* meðal *modulanna* h_3) upp í sína einföldu *factora* 7, 11, 13, og finna síðan hina samsettu eptir (121) þannig:

$$\begin{array}{l} 1 + 7 \\ 1 + 11 \\ \hline 1 + 7 + 11 \,.\, 1 + 11 \,.\, 7 \\ 1 + 13 \\ \hline 1 + 7 + 1 \,.\, 11 \,.\, 1 + 1 \,.\, 11 \,.\, 7 + 13 \,.\, 1 + 13 \,.\, 7 + 13 \,.\, 11 \,.\, 1 + 13 \,.\, 11 \,.\, 7. \end{array}$$

Þessir *factorar* verða þá, þegar slept er 1, þessir

7, 11, 77, 13, 91, 143, 1001.

Af þessum eru merkilegastir *modularnir* 7, 11, 13. Vèr höfum fundið fyrir 3456789 *residuum*

$$b - b_1 + b_2 = 336;$$

þess vegna er

$$3456789 \equiv 336 \ (mod.\ 7) \text{ eptir (108), þar 7 mælir 1001.}$$

Til að fá minstu leif, deili eg 336 með 7, fæ kvótann 48 og leifina 0, svo þá er

$$3456789 \equiv 0 \ (mod.\ 7),$$

er segir mèr, að 7 gangi upp í tölunni, og er það satt, því

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 6\ 2\ 5\ 1\ 4\ \ \ \\ 7)\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \hline 4\,9\,3\,8\,2\,7. \end{array}$$

Síðan tek eg

$$3456789 \equiv 336 \ (mod.\ 11),$$

deili 336 með 11 og fæ kvóta 30 og afgang 6 og segir það, að 11 gangi ekki upp í tölunni N, heldur gefi afganginn 6, og er það satt, því:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6\ \ \\ 11)\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \hline 3\,1\,4\,2\,5\,3. \end{array}$$

Loksins tek eg

$$3456789 \equiv 336 \ (mod.\ 13)$$

deili 336 með 13, fæ afgang 11; þá verður

$$3456789 \equiv 11 \ (mod.\ 13).$$

Eins verður afgangur 11, ef tölunni N er deilt með 13, því:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 8\ 7\ 11\ \ \ 8\ 11 \\ 13)\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \hline 2\,6\,5\,9\,0\,6. \end{array}$$

Deilileikseinkunnin með 7, 11, 13 er með orðum framsett (86, 11).

Það ber opt við í þessari þriðju mynd talnanna, að framkemur fyrst *negatift residuum;* er þá samt hægt að fá sèr annað *positift,* með því að leggja *modulus* við það, einu sinni eða optar, t. d.

$$N = 687934095431238017821859.$$

Látum nú t vera $= 4$, verður talan þannig skorin:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \overline{6879} & 3409 & \overline{5431} & 2380 & \overline{1782} & 1859 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b. \end{array}$$

Hèr set eg — yfir stuðlana, sem frá eiga að dragast:

+	—
1859	1782
2380	5431
3409	6879
7648	— 14092
	+ 7648
	— 6444, sem er neitandi leif.

Frum*modulus* er hèr $t^4 + 1 = 10000 + 1 = 10001$

$$\begin{array}{r} 10001 \\ -\ 6444 \\ \hline +\ 3557, \end{array}$$ játandi leif.

Þá er

$$68793409543123801782185 9 \equiv 3557\ (mod.\ 10001).$$

Það er líka satt, því þegar þessari stóru tölu er deilt með 10001, kemur í kvóta:

6878653089003479830 2, og afgangur 3557.

Factorar í 10001 eru 73 og 137, þá er og eptir (108)

$N \equiv 3557\ (mod.\ 73)$
og $(mod.\ 137)$.

73) 3557 (48	137) 3557 (25
292	274
637	817
584	685
53	132.

Þá er $N \equiv 53\ (mod.\ 73)$ og $\equiv 132\ (mod.\ 137)$.
Þegar N er deilt með 73, kemur
kvóti 942375473193476736742 2 og leif 53, en þegar sömu tölu er deilt með 137, kemur
kvóti 502141675497254027607 1 og leif 132, eins og samsvaranirnar segja.

Þessari þriðju mynd tilheyra deilileikseinkunnirnar fyrir $7 . 11 . 13 = 1001$, ef $t = 3$, og fyrir $17 \times 5882353 = 100000001$, ef $t = 8$. Heimfærum vèr þetta upp á vort síðasta N

$$68793409|54\overline{312380}|17821859 = N$$

$$\begin{array}{r} 68793409 \\ \hline 86615268 \\ -\ 54312380 \\ \hline 32302888 \end{array}$$

$$N \equiv 32302888\ (mod.\ 100000001).$$

þar nú 17 ganga upp í *frummodulus* 100000001, þá verður einnig
6879340954312380178218590 ≡ 32302888 (*mod.* 17).

Nú viljum vèr finna minstu leif:

$$17)\; 3\overset{15}{2}302\overset{11}{8}\overset{16}{8}\overset{15}{8}$$

$$\overline{1\;9\;0\;0\;1\;6\;9}$$ ganga af 15, þess vegna:

68793409543123801782185 9 ≡ 15 (*mod.* 17).

Eins má taka hinn annan *factor* 5882353 fyrir *modulus*, verður þá

6879340954312380178218 59 ≡ 32302888 (*mod.* 5882353),

og til að finna minstu leif, deili eg þannig:

5882353) 32302888 (5
29411765
2891123.

þess vegna

6879340954312380178218 59 ≡ 2891123 (*mod.* 5882353).

Nú viljum vèr reyna deilinguna með *modulus*

5882353) 68793409543123801782185 9 (116948795053822512
5882353 . . . .
9969879
5882353
40875265
35294118
55811474
52941177
28702973
23529412
51735611
47058824
46767872
41176471
55914013
52941177
29728368
29411765
31660301
29411765
22485367
17647059

$$\begin{array}{r} 48383088 \\ \underline{47058824} \\ 13242642 \\ \underline{11764706} \\ 14779361 \\ \underline{11764706} \\ 30146558 \\ \underline{29411765} \\ 7347935 \\ \underline{5882353} \\ 14655829 \\ \underline{11764706} \\ 2891123. \end{array}$$

Hèr fáum vèr sömu leif sem samsvaranin hefir.

144. Af næstundangangandi þremur töluliðum má sjá, að *frummodular* þeir, er fást úr hinum þar umtöluðu þremur tölumyndum, hafa þessi þrjú form, eptir því sem hafðir eru margir stafir í stuðli:

	t	$=$	1	2	3	4	....
úr Itu	10^t	$=$	10	100	1000	10000	....
úr IIri	10^t-1	$=$	9	99	999	9999	....
úr IIIju	10^t+1	$=$	11	101	1001	10001	....

Frum*modular* fyrstu myndarinnar eru 1 með eins mörgum núllum aptanvið, sem stafir eru hafðir í stuðli; hinnar annarar eru eins margir 9, sem stafir eru í stuðli; og hinnar þriðju byrja og enda með 1, og hafa þar á milli $t-1$ núll.

145. Sèrhver tala, sem einungis hefir í sèr *factorana* 2 eða 5, eða bæði 2 og 5, og þess vegna er í forminu $2^p \,.\, 5^q$, gengur upp í því veldi af 10, er hefir fyrir *exponent* hina stærri af tölunum p og q, og kvótinn verður 5^{p-q}, ef p er stærra, en 2^{q-p}, ef q er stærra. Sè nefnilega $p > q$, þá er $\frac{10^p}{2^p \,.\, 5^q} = \frac{2^p \,.\, 5^p}{2^p \,.\, 5^q}$ eptir (47, viðbót) $= \frac{5^p}{5^q} = 5^{p-q}$ (63, 4). Sè þar á móti $q > p$, þá er $\frac{10^q}{2^p \,.\, 5^q} = \frac{2^q \,.\, 5^q}{2^p \,.\, 5^q} = \frac{2^q}{2^p}$ (47, viðbót) $= 2^{q-p}$ eptir (63, 4).

Athugi. Hvernig (47, viðbót) verði hèr viðkomið, skilst þannig áhrærandi $10^p = 2^p \,.\, 5^p$

$10^p = 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \cdots\cdots$ p gjörendur,

en $10 = 2 \,.\, 5$; þess vegna

$10^p = (2 \,.\, 5)\,.\,(2 \,.\, 5)\,.\,(2 \,.\, 5)\,.\,(2 \,.\, 5) \cdots\cdots$ (p gjörendur)

$= 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 \cdots\cdots$ p af hverjum

$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \cdots\cdots$ p af hverjum

$= 2^p \,.\, 5^p$. Eins er áhrærandi $10^q = 2^q \,.\, 5^q$.

146. Til að sjá, hvar frumtölurnar fyrir innan 100 eiga heima í hinum þremur talnamyndum (140), setjum vèr þær hèr til yfirskoðunar:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
f_1	g_1	f_1	h_3	g_2 h_3	h_3	h_8	h_9	h_{11}	h_{14}	g_{15}	g_3	g_5	g_{21}	h_{23}

53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
g_{13}	h_{29}	h_{30}	g_{33}	g_{35}	h_4	g_{13}	g_{41}	h_{22}	h_{48}.

Og er þetta svo að skilja, að f vísar til fyrstu myndar, g til annarar og h til hinnar þriðju, en *indexarnir* segja til, hvað marga stafi hafa verður í stuðli, þegar tölurnar eru skornar, t. d. 17 heyrir til þriðju mynd, og þá verður að hafa 8 stafi í stuðli; 19 á heima í sömu mynd, og þar verður að hafa 9 stafi í stuðli. 41 á heima í annari mynd, og þar verður að hafa 5 í stuðli. 97 á heima í 3ju mynd með 48 stöfum í stuðli o. s. frv. Af þessu er ljóst, að fæstar af deilileikseinkunnunum verða hafðar til smávikanna, og eru ekki notandi nema við fjarska stórar tölur. Hèr af leiðir þá, að við flestar tölur verður drjúgara að reyna deilingu með þeim sjálfum (tölunum) til að finna þeirra leifar, heldur en að uppgötva þeirra deilileikseinkunnir. Menn geta annars sèð það, á töflunni í þessum tölulið, að hvað miklu leyti nota má í það og það skipti deilileikseinkunnir talnanna, sem menn hafa handa í milli.

147. Það getur opt komið til gagns að kunna leifaprófið, það er að skilja að prófa reikninga með leifum. Það má nefnilega prófa hinar 4 höfuðgreinir, *addition, subtraction, multiplication* og *division* með leifum; og þar til notast þá helzt tölurnar 9 og 11. En í þessum tilgangi er bezt að undirbúa svo regluna til að finna leifar þessara talna, að hún verði sem hægust, og það viljum vèr gjöra í næsta tölulið.

148. Prófið með 9 eða níundarprófið mætti vera þannig:

1. Hlaupa yfir alla 9, hvar sem menn sjá þá í tölunni.

2. Að stryka út eða einkenna með einhverju móti eða fela þá tvo tölustafi, sem til samans fylla 9, hvar sem þeir finnast, og gjöra þetta svo opt sem verður.

3. Eins ef menn sjá þrjá stafi eða fleiri, sem fylla 9.

4. Leggja saman stafina, sem eptir eru í tölunni, og sem þá ekki fylla 9. Þessi summa er leifin.

5. Eigi menn ekki hægt með að einkenna eða fela stafina, sem búið er að taka, þá er bezt að ganga á annanhvorn endann á tölunni, leggja saman tvo eða þrjá eða fleiri stafi, svo summan verði 9 eða meiri. Verði hún rètt 9, þá fela þá stafi með fingrinum; verði hún meiri enn 9, þá leggja saman stafina í henni, og þessa nýju summu við næstu stafi, o. s. frv.

Dæmi: Talan 5882353, deilirinn í stóru deilingunni (143). Þá er eptir 5ta reglu í (148): 5 og 8 er 13, það er 4 (með því að leggja saman 3 og 1 í 13). 4 og 8 er 12, það er 3, og 2 er 5, og 3 er 8 og 5 er 13, það er 4, og 3 er 7, sem er leif *divisors*.

2 Dæmi. *Dividendus* í sömu deilingu:

68793409543123801782185 9.

Sè byrjað vinstra megin, þá kveða svo að orði: 6 og 8 er 14 það er 5, og 7 er 12, það er 3, (hleyp yfir 9) og 3 er 6, og 4 er 10, það er 1, og 5 er 6, og 4 er 10, það er 1, og 3 er 4 og 1 er 5 og 2 er 7, og 3 er 10; það er 1, og 8 er 9, það er 0; og 1 er 1, og 7 er 8, og 8 er 16, það er 7, og 2 er 9, það er 0, og 1 er 1, og 8 er 9, það er 0, og 5 er 5, og það er leifin. Sama kæmi fram, ef tekin væri þversumman í tölunni; hún er 113, og 9 í 113 er 12 sinnum, gengur af 5.

Með sama hætti er leif kvótans í sömu deilingu = 6, og afgangsins = 8. Þetta kemur til skoðunar síðar.

149. Prófið með 11, (elleftarprófið), verður án skriptar gjört þannig:

Byrja hægra megin, og drag fyrsta staf frá öðrum, svo þann mismun frá þriðja staf, o. s. frv. alt af hinn fengna mismun frá næsta staf. Sè sá næsti stafur minni, svo ekki verði frádregið, þá drag hinn fengna mismun frá 11, en legg afganginn við komanda staf, það er að skilja, sè komandi stafur *k*, þá drag frá *k* + 11 eða lána 11, hvenær sem þarf, og hald síðan áfram

með frádragninguna, þangað til búið er að vinna upp alla töluna. Hinn seinasti mismunur er þá leifin, ef stafafjöldinn er oddatala, en sè hann jöfn tala, þá drag hina fengnu tölu frá 11, því hún var þá hin *negatifa* leif; er þá fengin hin *positifa*.

þetta er bygt á (143), þar 11 á heima í þriðju mynd, þegar $t = 1$; er þá reglan að draga summu stafanna í hinum jöfnu sætum b_1, b_3, o. s. frv. frá summu stafanna í hinum ójöfnu. Setjum t. d., að talan væri

$\cdots\cdot fedcba.$

þá er fyrst eptir nýju reglunni

$b - a$ í staðinn fyrir $a - b$, en $11 - (b - a)$ er $11 - b + a = 11 + a - b$, nefnilega hin *positifa* leif er $a - b$, þar stafirnir eru 2.

$c - (b - a) = c - b + a$, sem er *positif* leif, og rètt eptir (143), því stafafjöldinn er 3 eða oddatala.

$d - [c - (b - a)] = d - c + (b - a) = d - c + b - a$, sem er *negatif* leif, en $11 - (d - c + b - a) = 11 - d + c - b + a$ er *positif* leif; hèr eru 4 stafir, sem er jöfn tala o. s. frv.

Að 11 skuli takast til láns, þegar hinn komandi stafur k er of lítill, er til að forðast *negatif* mismun. Væri t. d. d of lítill, þá á að draga $[c - (b - a)]$ frá $11 + d$, og verður þá mismunurinn *positif*. En þegar komið er á enda tölunnar, verður að aðgæta, hvort hinn *positifi* mismunur er *positif* eða *negatif* leif.

Dæmi: Talan 5882353, sem er deilirinn í (143).

Hèr má segja: 3 frá 5 er 2, frá 3 er 1, frá 2 er 1, frá 8 er 7, frá 8 er 1, frá 5 er 4, sem er hin *positifa* leif, þar stafirnir eru 7. Hèr þurfti aldrei lán að taka. Tökum nú deilandann í 143:

6879340954312380178218599.

9 frá 11 er 2, og 5 er 7, frá 8 er 1, frá 1 er 0, frá 2 er 2, frá 8 er 6, frá 7 er 1, frá 1 er 0, frá 0 er 0, frá 8 er 8, frá 11 er 3, og 3 er 6, frá 11 er 5, og 2 er 7, frá 11 er 4 og 1 er 5, frá 11 er 6, og 3 er 9, frá 11 er 2, og 4 er 6, frá 11 er 5, og 5 er 10, frá 11 er 1, og 9 er 10, frá 11 er 1, og 0 er 1, frá 4 er 3, frá þremur er 0, frá 9 er 9, frá 11 er 2, og 7 er 9, frá 11 er 2, og 8 er 10, frá 11 er 1, og 6 er 7, sem er *negatif* leif, þar stafirnir eru 24, þá 7 frá 11 er 4, sem er *positif* leif.

Í sama dæmi er kvótans leif = 0 og afgangsins = 4.

Hèr var fyrirskrifað að byrja frádragninguna hægra megin, en þó er enn betur samkvæmt (143), að byrja hana vinstra megin, því þá þarf ekkert að skipta sèr af, hvort stafafjöldinn er jöfn eður ójöfn tala, svo aldrei þarf að *subtrahera* frá 11 vegna stafafjöldans, til að fá hina *positifu* leif, ef ekki þarf að taka til láns 11 á annað borð. Frádragningin verður hèr ætíð rètt, en ekki öfug, eins og stundum í hinni aðferðinni, t. d. þegar stafirnir eru 2, þá er leifin eptir (143) $= b - b_1$, og þetta er einmitt það, sem gjört er í þessari síðari aðferð með því að draga tugastafinn frá einingastafnum. Setjum nú, að stafirnir væri 3, þá er eptir þessari aðferð dreginn hundraðastafurinn frá tugastafnum, það er $b_1 - b_2$, og þetta aptur frá einingastafnum; það er $b - (b_1 - b_2) = b - b_1 + b_2$, sem er hin rètta *positifa* leif eptir (143). Hèr af sèst, að hvort sem stafafjöldinn er jöfn eða ójöfn tala, þá er ætíð frádragningin rètt, en ekki öfug. (Hina aðferðina fyrirskrifar Fallesen). Af þessum er sín aðferðin betri í hvort sinn, eptir því hvar sjaldnar þarf að taka 11 til láns.

150. Leifaprófsaðferðirnar verða skiljanlegar af þessum eptirfylgjandi setningum:

1. Í samlagningu á summa leifa samleggjandanna gjörð að minnstu leif að vera = leif summunnar, samber (110).

2. Í frádragningu á leif minkanda að vera = summu leifa frádraga og mismunar, gjörðri að minstu leif (25, 2).

3. Í margföldun á framkvæmi leifa margfalda og margfaldanda gjört að minstu leif að vera = leif framkvæmis margföldunarinnar (110).

4. Í deilingu á framkvæmi leifa deilis og kvóta gjört að minstu leif að vera = leif deilanda, ef enginn afgangur er; en sè afgangur, þá á leif hans að leggjast við framkvæmi leifa deilis og kvóta, og á þá að framkoma leif deilanda (58, 8).

Dæmi. Að prófa og sanna samlagningardæmið (20) með níundarprófi:

$$\begin{array}{r l l}
678345 & \equiv 6 \ (mod.\ 9) & \\
5321 & \equiv 2 \ (mod.\ 9) & \text{Samber (110).} \\
4894 & \equiv 7 \ (mod.\ 9) & \\
\hline
688560 & \equiv 15 \ (mod.\ 9) & \text{ɔ: } 6, \text{ því } 5 + 1 = 6.
\end{array}$$

Eins er $6 + 5 = 11$, ɔ: 2; $2 + 8 = 10$, ɔ: 1; $1 + 8 = 9$, ɔ: 0; þá er eptir 6.

Nú með elleftarprófi :

$$\begin{array}{r}678345 \equiv 8 \ (mod.\ 11)\\ 5321 \equiv 8 \ (mod.\ 11)\\ 4894 \equiv 10 \ (mod.\ 11)\\ \hline 688560 \equiv 26 \ (mod,\ 11)\end{array}$$ ↄ: 4, því $6 - 2 = 4$.

Eins er: $8 - 6 = 2$; $8 - 2 = 6$, $11 - 6 = 5$, $5 + 5 = 10$, $11 - 10 = 1$, $1 + 6 = 7$, $11 - 7 = 4$, $4 + 0 = 4$.

Nú deilingardæmið (143) með 9.

Leif deilis		Leif kvóta		Leif afgangs	
7	$\times$	6	$+$	8	$= 50$, ↄ: 5.

Eins er leif deilanda $= 5$.

Nú með 11.

Leif deilis		Leif kvóta		Leif afgangs	
4	$\times$	0	$+$	4	$= 4$.

Eins er leif deilanda $= 4$.

Athugi. Þó vèr höfum nú lengi nokkuð dvalið við þetta leifapróf, þá er það ekki svo að skilja, að vèr álítum það sè gagnlegt til daglegrar notkunar, heldur er það af því vèr viljum kynna oss eðli talnanna. Því í vísindum eiga menn ekki að meta lærdóma einungis eptir skildingaverði, því maðurinn (eða mannsins andi) lifir ekki af einusaman brauði. Til daglegrar notkunar eru betri prófreglur þær, er reikningsbækurnar kenna; enda er leifaprófið stundum brigðult, og segir ekki ætíð til reikningsvillnanna, því það segir ekki til, þó tölurnar skakki um heilan *modulus*, einn eða fleiri. *Fallesen* kveður svo að orði: að af 9 reikningsvillum, sem gjörðar eru, muni 8 sýna sig við níundarprófið, og af 11 villum muni 10 uppgötvast við elleftarprófið; einnig kunni, þegar bæði þessi próf eru viðhöfð, af 99 villum einungis 98 uppkomast.

151. Frumtalnaröðin í hinni eðlilegu talnaröð er óendanleg. Því setjum, að einhver frumtala p væri hin síðasta, þá er þó $(2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \cdots p) + 1$ tala, sem engin undangangandi tala gengur upp í, hvorki frumtala nè samsett tala. Að engin undangangandi frumtala gengur upp í þessu er ljóst af því, að allar undangangandi frumtölur ganga upp í $(2 \,.\, 3 \,.\, 5 \cdots p)$, því þær eru bersýnilegir gjörendur í þessu kunngjörða framkvæmi. Talan $(2 \,.\, 3 \,.\, 5 \cdots p) + 1$ er tvíliðuð stærð, og ganga

undangangandi frumtölur upp í fyrra liðnum, en ekki hinum síðara; hún er því ódeilileg með þeim eptir (103, 2). Samsettar tölur lægri ganga heldur ekki upp í þessu, því sè þær ekki veldistölur, þá liggja þær í frumtölunum, en sè þær veldistölur, þá ganga þær upp í hvorugum liðnum. þetta *binomium* eða tvíliðuð stærð er þá annaðhvort frumtala ellegar deilileg með frumtölu, sem er stærri en p. En hèr með er þá sagt, að til sè frumtala stærri en p. Svona gengur það óendanlega: að frumtalnanna framkvæmi bendir á frumtölu fyrir ofan sig, eða ofan þær.

152. það á heima í vísindalegri skoðun talna, að vita, hvar í hinum þremur talnamyndum (140), hver tala á heima, líkt og sýnishorn er gefið (146). þess vegna viljum vèr setja oss það verkefni: þegar tala er gefin, þá að finna hennar from*modulus*. Hvað fyrstu myndinni viðvikur, þá er þetta verkefni leyst (145). En til að vita, hver frum*modulus* sè talna, sem ekki eru *multipla* af 2 og 5, eða þeim einungis, þá má fyrst skrifa 1, og síðan smámsaman bæta þar aptan við núllum, deila svo þessu með hinni gefnu tölu, þangað til leif kemur, sem annaðhvort er $= 1$, og þá er frum*modulus* $999\cdots$, og talan á heima í annari mynd og heitir g, ellegar leif kemur, sem er $= -1$, eða *positif* leif, sem er einum minni en hin gefna tala, þá er frum*modulus* $= 1000\cdots01$, og talan á heima í þriðju myndinni og heitir h. Hin viðbættu núll segja í báðum þessum myndum *indexinn* t.

Dæmi: Sè gefin talan 41.

$$
\begin{array}{lrl}
 & & 41)\ 1\ (0{,}02439 \\
 & & \underline{\ \ 0\ \ } \\
r_0 & 1 & \ \ 10 \\
 & & \underline{\ \ \ 0\ \ } \\
r_1 = & 10 & \ \ 100 \\
 & & \underline{\ \ \ 82\ } \\
r_2 = & 18 & \ \ \ 180 \\
 & & \underline{\ \ \ 164} \\
r_3 = & 16 & \ \ \ 160 \\
 & & \underline{\ \ \ 123} \\
r_4 = & 37 & \ \ \ 370 \\
 & & \underline{\ \ \ 369} \\
r_5 = & 1 & \ \ \ \ \ \ 1.
\end{array}
$$

Talan er g_5

Hèr þýðir r_0 leif eða *residuum* (104) að engu núlli viðbættu, r_1 að einu núlli viðbættu, o. s. frv. Hèr er frum*modulus* 99999 eða eins mörg 9, sem núllum var viðbætt, því ef vèr deilum þessum frum*modulus* með 41, þá gengur upp:

$$
\begin{array}{r}
41)\ 99999\ (2439 \\
\underline{82} \\
179 \\
\underline{164} \\
159 \\
\underline{123} \\
369 \\
\underline{369} \\
0
\end{array}
$$

og kvótinn verður hèr hinn sami sem í fyrri deilingunni, að fráteknu núlli framan við hinn fyrra. En það núll, sem er fyrir framan kommuna, er óviðkomanda, því þá var enn ekki deilt neinni leif. Annars er þessi reikningur náskyldur tugabrotum, og í hinum svo kölluðu *periodisku* tugabrotum hefir *Ramus* þenna ritmáta.

Nú tökum vèr annað dæmi og veljum þar til töluna 73.

$$
\begin{array}{lr}
 & 73)\ 1\ (0,0137 \\
 & \underline{0} \\
r_0 = 1 & 10 \\
 & \underline{0} \\
r_1 = 10 & 100 \\
 & \underline{73} \\
r_2 = 27 & 270 \\
 & \underline{219} \\
r_3 = 51 & 510 \\
 & \underline{511} \\
r_4 = -1 & -1
\end{array}
$$

eða $r_4 = 72$ og kvóti 0,0136.

Talan er því h_4 og frum*modulus* $10001 = 10^4 + 1 = 10^4 + 1$ eptir (144). Hún gengur upp í 10001, því

$$
\begin{array}{r}
73)\ 10001\ (137 \\
\underline{73} \\
270 \\
\underline{219} \\
511 \\
\underline{511} \\
0
\end{array}
$$

Að leifin 1 verður *positif* við aðra mynd talnanna, er skiljanlegt af því, að eptir vorri reglu í þessum tölulið er hafður of stór *dividendus* 1 með viðbættum núllum í staðinn fyrir 999 ····, af því vèr í fyrstunni ekki vissum, í hverri myndinni talan ætti heima. Aptur á mót kemur leifin — 1 fram, eða *positif* leif, sem er einum minni en *divisor,* af því vèr þá höfum of lítinn *dividendus* að deila 100 ····, í staðinn fyrir 100 ···· 01.

Þegar deilingarnar verða langar, eins og er við margar tölur eða *divisora,* þá verður þessi niðurröðun reikningsins fyrirferðarmikil í skriptinni; þá hefir *Ramus* aðra niðurskipun á tölunum, sem er fyrirferðarminni, og er hún þannig við deilinguna með 41, til samanburðar við þá, sem er hèr að framan í þessum tölulið:

	$m =$	1	2	3	4	5
$r^0 = 1$	$r_m =$	10	18	16	37	1
$\dfrac{r_{m-1}\,10}{41}$	$=$	0	2	4	3	9

Hèr eru 3 línur, hver niður undan annari. Í efstu línunni eru *indexar* leifanna, þeir eru 1, 2, 3, 4, 5; það er 1^ta^ leif, 2^ur^ leif o. s. frv. Í miðlínunni stendur vinstra megin $r_0 = 1$, það er núllta leif, þegar ekki er búið að bæta neinu núlli við. Þar aptanvið kemur $r_m = 10$. Sá *index* m við r gildir fyrir alla miðlínuna, en merkir í hverjum stað töluna, sem fyrir ofan stendur í efstu línunni. Verður þá

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ = 10 & 18 & 16 & 37 & 1, \end{array}$$

sem skilst af samanburði við deilingardæmið með 41 framan til í þessum tölulið. Hin þriðja eða neðsta línan hefir í sèr alla kvótastafina 0, 2, 4, 3, 9, og verða þeir að ákvarðast fyrst, hver á undan sinni leif, sem upp yfir honum stendur, og stendur reglan fyrir þeirri ákvörðun vinstra megin í línunni, nefnilega $\dfrac{r_{m-1}\,10}{41}$ sem á svo að skiljast: Margfalda skal næstundangangandi leif með 10, (ɔ: hugsa sèr 0 aptan við hana) og deila síðan með *divisornum* 41, þá skrifast hver kvóti í neðstu línuna; og má kveða þannig að orði: 41 í 10 (ɔ: r_0 með hugsuðu núlli aptan við) er 0 sinnum. Þetta 0 skrifast í kvótaröðina aptan við jafnaðarmerkið. Með þessum kvóta margfaldast deilirinn 41, og framkvæmið 0 dregst frá 10 (ɔ: r_0 með núlli aptan við), kemur

10, sem er fyrsta leif r_1 og skrifast fyrir ofan kvóta sinn 0 og neðan *index* sinn 1 í efstu línunni. Nú hugsa eg mèr 0 aptan við leifina 10, kemur þá 100; þessu deili eg með 41, koma 2 í kvóta, sem skrifast í kvótaröðina niður undan 2 (ɔ: $m = 2$), og segi: 2svar 41 er 82, frá 100 (ɔ: r_1 með 0 aptan við) kemur önnur leif $r_2 = 18$. Síðan hugsast 0 aptan við hana, verður 180, 41 þar í er 4 sinnum, sem er 3ji kvóti, o. s. frv.

153. Þess er stundum fjarska langt að bíða í þessari deilingu, unz leif kemur, sem er = 1 eða — 1, og þá sýnist oss stundum vert að búa til töflukorn, sem talað er um í (60), og hafa það jafnvel á lausum miða, sem renna megi eptir miðlínunni eða leifalínunnni ofanverðri, sem talað er um í undanganganda tölulið, svo hægt verði að *subtrahera* framkvæmin frá næstundangangandi leif með hugsuðu núlli aptan við. Vèr viljum t. a. m. deila með 97, þá skyldi töflukornið á miðanum lagast svona:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
97	194	291	388	485	582	679	776	873

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_0 = 1\ r_m =$	10	3	30	9	90	27	76	81	34
$\frac{r_{m-1}10}{97} =$	0	1	0	3	0	9	2	7	8

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
49	5	50	15	53	45	62	38	89	17	73	51
3	5	0	5	1	5	4	6	3	9	1	7

22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
25	56	75	71	31	19	93	57	85	74	61	28
5	2	5	7	7	3	1	9	5	8	7	6

34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
86	84	64	58	95	77	91	37	79	14	43	42
2	8	8	6	5	9	7	9	3	8	1	4

46	47	48
32	29	—1
4	3	3

þessi tala 97 er því h_{48}, eins og stendur (146), og má prófa þenna reikning, hvar sem vill, með leifaprófi; því allsstaðar vitum vèr *divisor*, kvóta, leif og *dividendus*. *Divisor* 97 $\equiv$ 7 (*mod.* 9). Kvótinn er seinast (eða við *index* 48) =

1030927835051546391752577319587628865979381 4432

við hina *positifu* leif 96; og er $\equiv$ 7 (*mod.* 9), og leifin 96 $\equiv$ 6 (*mod.* 9)

þá $7 \times 7 + 6 =$

$49 \quad + 6 = 55 \equiv 1$ (*mod.* 9).

Dividendus er 1 með 48 núllum aptan við og þess vegna $\equiv$ 1 (*mod.* 9), svo þessu ber saman. Reynum vèr reikninginn við $m = 19$, þá er þar *divisor* 97, eins og áður, kvóti 1030927835051546 39 og leif 17; deilir $\equiv$ 9 (*mod.* 11), kvóti $\equiv$ 9 (*mod.* 11), leif $\equiv$ 6 (*mod.* 11), þá

$9 \times 9 + 6 = 87 \equiv 10$ (*mod.* 11).

Dividendus er 1 með 19 núllum aptan við $\equiv$ 10 (*mod.* 11), svo því ber einnig saman. það er merkilegt, að hèr er óhafandi aðferðin að byrja frádragninguna vinstra megin (149), því þá verður að taka 11 til láns við hvern einasta staf. þar á mót er það augnabliksverk, ef byrjað er hægra megin. En þar núllin eru 19, og sá 1 fyrir framan er tuttugasti stafurinn, og stafafjöldinn er því jöfn tala, þá verður að draga 1 frá 11; kemur þá *positif* leif = 10.

154. þó stundum sè fjarska langt að bíða, unz leif kemur = 1, eins og segir upphaflega í (153), þá segir þó hið nafnkenda *Fermats theorema*, hvenær hún sè viss að koma, og jafnvel hvenær hún kunni einnig fyrri að koma. þetta *theorema* orðar *Gauss* og fleiri hèr um bil svona:

Ef p er frumtala, sem ekki gengur upp í A, og A^x er hið lægsta veldi tölunnar A, sem samsvarar einingunni (ɔ: er $\equiv 1$) (*mod.* p), þá er vísirinn x annaðhvort $= p - 1$ eða gengur upp þar í.

Þá er fyrst að sanna fyrra hluta þessa lærdóms: þegar nefnilega frumtala p ekki gengur upp í A, þá gengur hún upp í $A^{p-1} - 1$; því þegar *multipla*

$$A,\ 2A,\ 3A \cdots (p-1)\ A$$

deilast með p, þá koma ýmislegar leifar, það táknum vèr þannig:

$$A \equiv r_1\ (mod.\ p)$$
$$2A \equiv r_2\ (mod.\ p)$$
$$3A \equiv r_3\ (mod.\ p)$$

....

....

$$(p-1)\ A \equiv r_{p-1}\ (mod.\ p).$$

Þegar þá þessar samsvaranir margfaldast saman, eptir (110), þá kemur:

$$A + 2\ A + 3\ A \cdots (p-1)\ A \equiv r_1\ r_2\ r_3\ r_{p-1}\ (mod.\ p).$$

Þessi *residua* $r_1, r_2, r_3 \cdots r_{p-1}$ eru nú

$$1,\ 2,\ 3, \cdots (p-1),$$

þó ekki eptir röð, heldur ýmislega. Að þessar tölur sè hin rèttu *residua*, leiðir af því, að þau eru takmörkuð bæði af fjölda, stærð og ýmislegleika. Þau eru að tölu $p - 1$, að stærð öllsaman $< p$, eða minni en *modulus*, þó meiri en 0, því *modulus* gengur ekki upp í $1A \cdots (p-1)A$ (117). Þau eru öll ýmisleg, því væri tvö jöfn, þá hefði tvö *multipla* qA og q_1A jafna leif. Þá væri eptir (103, 5) þessara leifa mismunur $= 0$, og þegar bókstafirnir í (103, 5) væri notaðir, þá væri

$$a - b = (h-k)n + (q-r)$$

og nú skyldi vera $(q-r) = 0$

þá yrði

$$a - b = (h-k)n\,;$$

n yrði þá að ganga upp í $a - b$. En í vorum hèr viðhöfðu bókstöfum segði þetta, að *modulus* p gengi upp í $qA - q_1A = (q-q_1)A$. Nú er það gefið, að frumtalan p gangi ekki upp í A, en bersýnilegt er, að p gengur ekki upp í $(q-q_1)$, þar q og q_1 eru misjafnir *coëfficientar* í *multiplunum*, allir minni en p, og þess vegna mismunur þeirra einnig minni, því þegar allar 3 tölurnar í frádragningu eru *positifar*, þá er *minuendus* stærstur, og

hann er hèr minni en p, þar hèr skoðast ekki nema $p - 1$ fyrstu *multipla* af A. Mismunurinn í frádragningunni verður því minni en q, og q minna en p, þess vegna $q - q_1 < p$. *Modulus* p gengur því ekki upp í $(q - q_1)$ og ekki upp í A eptir áður sögðu, þess vegna ekki upp í $(q - q_1)\ A$ (134). Leifarnar eru því allar misjafnar. Hverjar geta þá leifarnar verið, þar þær eru allar minni en p, allar misjafnar og að tölu $p - 1$? Þær verða að vera $1, 2, 3, \cdots (p - 1)$, og allar þessar tölur verða að uppvinnast.

Nú þar gjöranda röð má vera allavega eptir geðþekkni (46), þá er:

$$A \times 2A \times 3A \cdots (p - 1)\ A \equiv 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)\ (mod.\ p).$$

Hèr má nú vinstra megin eptir sama (46) taka alla *coëfficientana* út af fyrir sig, kemur:

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)$$

og alla gjörendurna A út af fyrir sig, kemur $A.\,A.\,A \cdots$, það er $(p - 1)$ *factorar*, allir sami bókstafur A, það er $= A^{p-1}$; þess vegna er framkvæmið vinstra megin við samsvörunarmerkið

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)\ A^{p-1}$$

en hægra megin, eins og áður er sagt, $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)$.

Congruentian verður þá

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)\ A^{p-1} \equiv 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)\ (mod.\ p.)$$

eða

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)\ A^{p-1} - 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1) \equiv 0\ (mod.\ p)$$

eða

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)\ (A^{p-1} - 1) \equiv 0\ (mod.\ p).$$

Þetta segir, að p gangi upp í stærðinni vinstra megin við *congruenz*merkið. Hún getur skoðazt sem tveir gjörendur, og þegar p gengur ekki upp í $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots (p - 1)$, verður p að ganga upp í $A^{p-1} - 1$ eða

eða $\qquad A^{p-1} - 1 \equiv 0\ (mod.\ p)$

$$A^{p-1} \equiv 1\ (mod.\ p).$$

Hèr með er þá sannaður fyrri hlutinn af *Fermats theoremi.*

155. Til að gjöra oss ljósara, hvernig leifarnar haga sèr í (154), viljum vèr skoða talnadæmi og láta A vera 10, sem er umferðin í voru talnakerfi (*decadikinni*), og frumtöluna látum vèr vera 7, sem ekki gengur upp í 10, þá verður:

Multipla nA	kvótar og *modular,*		leifar r_n		*congruentiur*
$1 . 10 = 10$	$= 1 . 7$	$+$	3	ɔ:	$A \equiv r_1$
$2 . 10 = 20$	$= 2 . 7$	$+$	6	ɔ:	$2A \equiv r_2$
$3 . 10 = 30$	$= 4 . 7$	$+$	2	ɔ:	$3A \equiv r_3$
$4 . 10 = 40$	$= 5 . 7$	$+$	5	ɔ:	$4A \equiv r_4$
$5 . 10 = 50$	$= 7 . 7$	$+$	1	ɔ:	$5A \equiv r_5$
$6 . 10 = 60$	$= 8 . 7$	$+$	4	ɔ:	$6A \equiv r_6$.

þetta seinasta er:

$$(p - 1)\ A = 60 = 8 . p + r_{p-1}.$$

Productið af *congruentiunum* í tölum er:

$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 10^6 \equiv 3 . 6 . 2 . 5 . 1 . 4$ (*mod.* 7)
eða þar röð gjöranda má vera eptir geðþekkni
$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 10^6 \equiv 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ (*mod.* 7).

Eins má færa stærðir yfir um *congruenz*merkið eins og yfir jafnaðarmerkið, og skipta um $+$ og $-$ þannig:
$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 10^6 - 1.2.3.4.5.6 \equiv 0$ (*mod.* 7).
þetta gefur sama sem að *subtrahera* eina *congruentiu* frá annari (110), því

$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 10^6 \equiv 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$ (*mod.* 7)
$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \equiv 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$ (*mod.* 7)

$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6(10^6-1) \equiv 0$ (*mod.* 7).

Modulus 7 gengur ekki upp í $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ eptir (118); þá verður hann að ganga upp í $10^6 - 1$, því þegar tala skal ganga upp í *producti,* þá verður hún að minsta kosti að ganga upp í einhverjum *factor* þess (118). þess vegna er

$$10^6 - 1 \equiv 0 \ (\textit{mod. } 7)$$

eða $10^6 \equiv 1$ (*mod.* 7) eða $1000000 \equiv 1$ (*mod.* 7).

En leifin af 1000000 er 1 eptir (86, 11), því

1|000|000
1

1 eða 7 í 1 er 0 sinnum, gengur af 1.

Eins mátti skoða $10^6 - 1 \equiv 0$ (*mod.* 7), þannig:

$10^6 - 1 = 1000000 = 999999$

999|999
999

0 eða 7 í 0 er 0 sinnum, gengur upp.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 2\,1\,5\,3\,4 \\ 7)\underline{999999} \\ 142857. \end{array}$$

Hèr málti og reyna 1000000 þannig:

	$m =$	1	2	3	4	5	6
$r_0 = 1$	$r_m =$	3	2	6	4	5	1
$\dfrac{r_{m-1}\,10}{7}$	$=$	1	4	2	8	5	7.

Eptir (146) er 7 einn af *modulunum* h_3, og á heima í 3ju mynd talnanna. Menn geta þá einnig látið töluna 7 eiga heima í 2ari mynd og vera g_6 með því að hafa helmingi fleiri stafi í stuðli, þegar tölurnar eru skornar í stuðla. Þannig er með *modulana* h_t. Leifin 6, hin 3ja í prófinu, sem nú þegar var gjört, er *positif*, og henni er samfara *negatifa* leifin — 1, þegar kvótinn er ekki látinn vera 2, heldur 3.

156. Hinn síðari hluti af *Fermats theoremi*, að lægsti vísirinn, er heitir x, kunni að vera $< p - 1$, og ganga þá upp í $p - 1$, svo þá nægi að hefja A upp í lægra veldi en hið $(p - 1)^{ta}$ og frumtalan p gangi einnig þá upp í $A^x - 1$, sannast þannig:

Vilji nokkur neita því, að lægsti vísir x gangi upp í $p - 1$, og segja, að þá yrði afgangur, eða yrði

$$p - 1 = mx + r$$

því það, að lægsti vísir x gangi upp í $p - 1$, táknast þannig:

$$p - 1 = mx$$

en r ætti að vera afgangur, sem væri minni en x, en meiri en 0, það er

$$0 < r < x,$$

þá yrði

$$A^{mx+r} - 1 \equiv 0 \ (mod.\ p)$$

eptir fyrra parti *theoremsins*. En þessi *congruentia* fæst með því, að setja $mx + r$ sem *exponent* við A, í staðinn fyrir $p - 1$, sem er $= mx + r$.

Nú er áskilið

$$A^x - 1 \equiv 0 \ (mod.\ p)$$

og þar af leiðir

$$A^{mx} - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p)$$

því $A^{mx} - 1$ er *multiplum* af $A^x - 1$, eptir (64, *series A*), sem heimfært er upp á tilfellið $a = 1$ í (142). Hèr viljum vèr nefnilega segja, að ef p gengur upp í *factornum* $A^x - 1$, þá gangi p einnig upp í honum margföldum (103, 3) nefnilega í $A^{mx} - 1$. Nú höfum vèr þá

$$A^{mx+r} - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p)$$

og $\quad A^{mx} - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p)$ *subtr.*

$$A^{mx+r} - A^{mx} \equiv 0 \ (mod. \ p).$$

En $A^{mx+r} = A^{mx} . A^r$ þess vegna

$$A^{mx} A^r - A^{mx} \equiv 0 \ (mod. \ p)$$

eða $\quad A^{mx}(A^r - 1) \equiv 0 \ (mod. \ p)$

með því að útiloka sameiginlega *factorinn* A^{mx}, en inniloka hina ósameiginlegu gjörendur A^r og 1 í sviga.

Nú gengr p ekki upp í A^{mx}, því það á ekki að ganga upp í A eptir skilyrði *theoremsins* og þá ekki upp í A^{mx} (118), því A^{mx} þýðir $AAA \cdots$ (mx gjörendur); þá má p til að ganga upp í $A^r - 1$, eða

$$A^r - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p).$$

En þetta er ómögulegt, því x er hinn lægsti vísir, sem A getur haft til þess að p gangi upp í veldi þess, þegar 1 er dreginn frá því; en r er leif minni en x, sem afgengur, þegar $p - 1$ er deilt með x, því $p - 1$ var sett $= mx + r$; átti þá r að vera meira en 0, og fyrir það er vor seinasta *congruentia* ósönn. En megi r vera $= 0$, þá verður hún sönn, því þá er $p - 1 = mx$, eða x gengur upp í $p - 1$, eða er *submultiplum* þess, og *congruentian* verður

$$A^0 - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p)$$

eða $\quad 1 - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p)$

eða $\quad 0 \equiv 0 \ (mod. \ p)$

en þetta eru ekki mikil tíðindi, að p gangi upp í 0, því það er þar í 0 sinnum, og gengur ekkert af. Af þessu leiðir þá

$$p - 1 \equiv 0 \ (mod. \ x)$$

nefnilega x, sem gefur $A^x - 1 \equiv 0 \ (mod. \ p)$, gengur upp í $p - 1$.

157. Dæmi upp á það, hvernig *Fermats theorema* gefur hugvekju um það, hversu lengi deila þurfi, unz leifin $= 1$ kemur, eru allar tölurnar g og h í (146). Þar er nefnilega:

$p =$	3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61.
$p-1=mx=$	2, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, 30, 36, 40, 42, 46, 52, 58, 60.
$m =$	2, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 12, 8, 2, 1, 4, 1, 1.
$x =$	1, 6, 2, 6, 16, 18, 22, 28, 15, 3, 5, 21, 46, 13, 58, 60.
$p =$	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
$p-1=mx=$	66, 70, 72, 78, 82, 88, 96.
$m =$	2, 2, 9, 6, 2, 2, 1.
$x =$	33, 35, 8, 13, 41, 44, 96.

Eptir fyrra hluta *thoremsins* á frumtalan 41, sem ekki gengur upp í 10, að ganga upp í $10^{40}-1$, eða gefa leifina 1, þegar 1 með 40 núllum aptan við er deilt með 41, eða $10^{40} \equiv 1$ (*mod.* 41). En síðari hluti *theoremsins* gefur von um, að 10^5 kunni og svo að gefa leifina 1, þegar því er deilt með 41, svo lægsti *exponens* væri $= 5$, og $mx = 8 \cdot 5 = 40$, það er $40 \equiv 0$ (*mod.* 5). En vissuna hèr um gefur deilingin (152). Fyrri hlutinn setur víst takmark, nær leifin 1 komi, en síðari hlutinn gefur von um, að leifin kunni koma fyrri, nefnilega við *submultiplum* þess vísis, sem fyrri hlutinn tiltekur.

Þetta tölukorn í núveranda tölulið (157) er nokkuð á annan veg en í (146), því allar tölurnar h í (146) eru hèr skoðaðar sem g; en *indexinn* við g er þá líka tvöfaldur við þann, er h áður hafði. Það sást á dæminu (155), þar sem *modulus* er 7, að þegar *negatifa* leifin -1 kemur, þá má halda áfram deilingunni til hins tvöfalda *index,* kemur þá *positifa* leifin 1. Því leifarnar koma þá eins og hinar sömu í röð, en allar öfugar. Því eins og 6 er samfara -1, svo er, þegar kvótinn er hafður um 1 of stór, 4 samfara -3, 5 samfara -2, og 1 samfara -6, sem finst, þegar dregið er frá *modulus* eða deilinum 7, svo leifarnar í g eru

$$3,\ 2,\ 6,\ -3,\ -2,\ -6.$$

Eins fylgja kvótarnir öðru merkilegn lögmáli; þeir fylla 9 í röð í hinum fyrra og síðara helmingi. Þeir voru í þessu dæmi:

	1, 4, 2
	8, 5, 7
Summa	9, 9, 9.

Af þessu sjáum vèr, að g myndar og yfirgrípur heilar umferðir kvóta og leifa, en h einungis hálfar. Vèr getum því sagt: Hinir jöfnu *indexar* g^{anna} innibinda í sèr h^{anna} *indexa*.

158. Þegar frumtala p ekki gengur upp í A, þá gengur p^{α} upp í $A^{p^{\alpha-1}(p-1)}-1$.

Sönnun fyrir þessu má vera eins og í (154). Vèr skoðum nefnilega hin fyrstu p^{α} *multipla* af A, en hlaupum þó fram hjá þeim af hinum sömu, sem undir eins eru *multipla* af p; en þessi, sem yfir skal hlaupa, eru:

$$pA,\ 2pA,\ 3pA, \cdots p^2A \cdots p^3A \cdots p^{\alpha}A\cdot$$

sem finnast með því að *multiplicera* pA með tölunum

$$1,\ 2,\ 3, \cdots p, \cdots p^2, \cdots p^{\alpha-1}$$

og eru því að tölu $p^{\alpha-1}$.

Hin *multipla*, sem þá eru eptir, og vèr höldum, eru:

$$A, 2A, 3A \cdots (p-1)A, (p+1)A \cdots (p^2-1)A, (p^2+1)A, \cdots (p^{\alpha}-1)A.$$

Þessara *multipla* fjöldi fæst, þegar fjöldi hinna burtvörpuðu $= p^{\alpha-1}$, er dreginn frá fjölda þeirra, sem fyrst voru tekin, sem var $= p^{\alpha}$; svo fjöldi þeirra, sem vèr höldum, er

$$= p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Öll þessi *multipla*, deild með p^{α} gefa ýmislegar leifar, eins og í (154)

$$\left.\begin{array}{rcl} A & \equiv & r_1 \\ 2A & \equiv & r_2 \\ 3A & \equiv & r_3 \\ \cdots\cdots & & \\ (p-1)A & \equiv & r_{p-1} \\ (p+1)A & \equiv & r_{p+1} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ (p^2-1)A & \equiv & r_{p^2-1} \\ (p^2+1)A & \equiv & r_{p^2+1} \\ (p^{\alpha}-1)A & \equiv & r_{p^{\alpha}-1} \end{array}\right\} (mod.\ p^{\alpha})$$

Að *residua* í þessum *congruentium* sè öll ójöfn, kemur af sömu orsök sem í (154), nefnilega ef tvær af þeim leifum væri jafnar, þá yrði p^{α} að ganga upp í tilheyrandi *multipla* mismun (103, 5), þess vegna annaðhvort upp í A, ellegar þeirra *coëffici-*

$p_1^{\alpha_1-1}, \; p_1-1, \; p_2^{\alpha_2-1}, \; p_2-1, \; p_3^{\alpha_3-1}, \; p_3-1, \cdots,$
svo þá má jafnvel vænta, að x megi vera *submultiplum* hins minsta samdeilanda hinna nefndu talna.

160. Af næstundanganganda tölulið, samt (140) (141) (142) (143) (154) (156), má læra merkileg eðli talnanna, því flest, sem þar er sagt um tugakerfið, má heimfærast upp á öll önnur tölukerfi, með því að setja A eða umferðina í staðinn fyrir 10. En til að útbreiða skoðun vora um hin almennu eðli, viljum vèr framsetja þá lærdóma hèr

1. Sèrhver tala, sem gengur upp í kerfisumferðarinnar t^{ta} veldi (141) (t er stafafjöldinn, sem hafður er í stuðli), gengur upp í tölu skrifaðri í A tölukerfi, ef hún gengur upp í t seinustu stöfum hennar, eða í seinasta stuðli; annars verður afgangur sami sem af seinasta stuðli. Merk: Til aðgreiningar er hèr sett stryk yfir töluna, þegar hún er skrifuð í öðru en tugakerfi. Kerfisumferðin í fimtarkerfi er $5 = \overline{10}$; nú skal t vera 2, þá er $5^2 = \overline{100}$. Tölur, sem ganga upp í 25, eru ekki aðrar enn 5 og 25. Sè nú $\overline{100}$ skorið í stuðla eða gjört $\overline{1|00}$ með 2 stöfum í hverjum, þá ganga bæði 5 og 25 upp í núllunum. Tökum nú $100 = \overline{400}$ $= \overline{4|00}$, þá ganga 5 og 25 eins upp í þeim núllum. Þar á móti ganga ekki 25 upp í $\overline{4|20}$, $= 110$, því 25 ganga ekki upp í $\overline{20}$, en 5 ganga upp þar í, því $\overline{20} = 10$ eða 2 fimtir.

2. Sèrhver tala, sem gengur upp í $A^t - 1$, eða upp í hæsta staf kerfisumferðarinnar skrifuðum nokkrum sinnum $= t$sinnum, hún gengur upp í tölu skrifaðri í A tölukerfi, ef hún gengur upp í stuðla þversummunni; annars gefur hún sama afgang sem stuðla þversumman, (142). Í sjöundarkerfi er hæsti stafur 6, og ef $t = 3$, þá verður $\overline{666}$ frum*modulus* $= 342$ eptir (11). Upp í honum ganga 2, 9, og 19. Tökum nú $\overline{12345} = 3267$, og skerum þá tölu í stuðla með $t = 3$, svo: $\overline{12|345}$; leggjum stuðlana saman

$$\begin{array}{r} \overline{12|345} \\ \overline{12} \\ \hline \overline{360} \end{array}$$

Stuðlaþversumman er $\overline{360} = 189$, samber (11). Nú er að vita hvort 2, 9, 19 ganga upp í þversummunni. 2 ganga ekki upp í henni $\overline{360} = 189$, heldur gefa leif $= 1$; eins ganga ekki 2 upp í $\overline{12345} = 3267$. 9 ganga upp í $\overline{360} = 189$, einnig upp í

$\overline{12345} = 3267$; 19 ganga ekki upp í $\overline{360} = 189$, heldur gefa leifina 18. 19 ganga heldur ekki upp í $\overline{12345} = 3267$, heldur gefa eins leifina 18.

3. Sèrhver tala, sem gengur upp í $A^t + 1$, það er kerfisumferðarinnar t^{ta} veldi að viðþættum 1, gengur upp í tölu skrifaðri í A tölukerfi, ef hún gengur upp í stuðlaþvermismuninum; annars gefur sömu leif sem hann (143). Sè $A = 11$, og $t = 3$, þá er $11^3 + 1 = 1332 = 4 . 9 . 37 = \overline{1001}$ eptir (10), og er þetta frum*modulus* í elleftarkerfi, þegar 3 stafir eru hafðir í stuðli. Tökum nú töluna $\overline{12345}$ í elleftarkerfi, skerum hana og tökum stuðlaþvermismuninn

$$\begin{array}{r} \overline{12|345} \\ \underline{\overline{12}} \\ \overline{333} \end{array} = 399. \text{ Samber (11).}$$

Nú er að reyna deilingarnar með *factorunum* 4, 9, 37. 4 ganga ekki upp í $\overline{333} = 399$, heldur gefa leifina 3. Sama er með $\overline{12345} = 17715$ eptir (11). 9 ganga ekki upp í þessum tölum, heldur gefa einnig leifina 3 í báðum. 37 ganga ekki upp í tölunum, heldur gefa í báðum leif $= 29$.

4. Frum*modularnir* í öllum kerfum skrifast eins og í (144), hvað 1 og 0 snertir, en hæsti tölustafur umferðarinnar er ýmislegur í ýmislegum kerfum, t. d. í fimtarkerfi er hann 4, í sjöundarkerfi er hann 6, í elleftarkerfi er hann (10) eptir skrifmátanum í tölulið (6) o. s. frv. Umferðin táknast eins í öllum kerfum, nefnilega 10 eða $\overline{10}$, hennar annað veldi $\overline{10}^2 = \overline{100}$ o. s. frv. Hèr af leiðir, að $A^t - 1$ er sama sem hæsti stafur kerfisumferðarinnar ritaður nokkrum sinnum $= t$ sinnum, eins og segir hèr (160, 2), því t. d. í elleftarkerfi er $\overline{10}^2 - \overline{1} = \overline{100 - 1} = 121 - 1 = 120 = 10 . 11 + 10 = \overline{(10)(10)}$. Hèr er hæsti stafur umferðarinnar skrifaður tvisvar, það er 10 elleftir og 10 einingar. Eins er $\overline{10^3 - 1} = \overline{1000 - 1}$. Hèr má ekki segja: 1 frá 10 er 9, heldur 1 frá 11 er 10. Þessir 11 eru teknir til láns af $\overline{1}$, sem er fyrir framan núllin og þýðir 11^3; hann verður því $10 . 11^2 + 10 . 11 + 10 = \overline{(10)(10)(10)}$, það er 10 elleftir annarar stèttar, 10 elleftir og 10 einingar. Fengi hann aptur sína minstu einingu, þá yrði hann $10 . 11^2 + 10 . 11 + 11 = 10 . 11^2 + 11^2 + 0 = 11 . 11^2 + 0 + 0 = 11^3$.

5. Tala, sem hefir í sèr einungis frum*factora* einhverrar kerfis-

umferðar, einn eða fleiri, gengur upp í því veldi kerfisumferðarinnar, sem hefir fyrir *exponent* stærsta *exponent factoranna* í *divisor* (145). Nú getur kerfisumferðin verið annaðhvort ein frumtala í einhverju veldi, svo sem p^{α}, ellegar fleiri, svo sem $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ $\cdots$, og svo skyldi vera spurt um aðra tölu $p_1^{\beta_1}$ $p_2^{\beta_2}$ $\cdots$, upp í hvaða veldi tölunnar $p_1^{\alpha_1}$ $p_2^{\alpha_2}\cdots$ hún gengi. Þá er að leita eptir þeim *exponent* á meðal β_1, β_2,$\cdots$ sem stærstur er, og hefja tölunna $p_1^{\alpha_1}$ $p_2^{\alpha_2}\cdots$ upp í það veldi, er hann bendir á. Nú skyldi meðal *exponentanna* β_1, β_2,$\cdots$ *exponentinn* β_2 vera stærstur, þá yrði að hefja $p_1^{\alpha_1}$ $p_2^{\alpha_2}\cdots$ upp í hans veldi, og þá yrði það $p_1^{\alpha_1\beta_2}p_2^{\alpha_2\beta_2}\cdots$, þá gengi $p_1^{\beta_1}$ $p_2^{\beta_2}$ upp í $p_1^{\alpha_1\beta_2}p_2^{\alpha_2\beta_2}$ $\cdots$, því $\dfrac{p_1^{\alpha_1\beta_2}p_2^{\alpha_2\beta_2}}{p_1^{\beta_1}\,p_2^{\beta_2}} = p_1^{\alpha_1\beta_2-\beta_1}p_2^{\alpha_2\beta_2-\beta_2}$. Að þetta sè heil tala, sèst bæði á (135) og líka á *exponentunum*, því hvað *exponentinn* $\alpha_1\beta_2-\beta_1$ snertir, er gefið $\beta_2 > \beta_1$ og þess vegna er sá *exponent posisif*. Sama er að segja um síðara *exponentinn* $\alpha_2\beta_2-\beta_2$ $= (\alpha_2-1)\beta_2$, því α_2 getur ekki verið < 1, því þá hyrfi p_2 burt úr $p_1^{\alpha_1}$ $p_2^{\alpha_2}$, en það er skilmáli setningarinnar, að $p_1^{\beta_1}$ $p_2^{\beta_2}$ hafi engan frum*factor*, sem kerfisumferðin $p_1^{\alpha_1}$ $p_2^{\alpha_2}$ ekki hefir. En undir eins og $\alpha_2 = 0$, svo verður og $\beta_2 = 0$ og gæti ekki verið stærsti *exponent* meðal β_1, β_2,$\cdots$ Í tylftarkerfi er $12 = 2^2 . 3$. Upp í hvaða veldi af 12 ætti þá $2^5 . 3^6$ að ganga? Svar: upp í $12^6 = 2^{12} . 3^6$, þá er

$$\frac{2^{12} . 3^6}{2^5 . 3^6} = 2^7 = 2^{2\cdot 6-5} . 3^{1\cdot 6-6} = 2^{12-5} . 3^0.$$

6. *Fermats theorema* hljóðar eins í öllum tölukerfum (154); eins er (158) og (159), og getur úttalazt þannig: Sèrhver tala, sem ekki hefir í sèr frumtölur kerfisumferðarinnar, gengur upp í hæsta tölustaf umferðarinnar rituðum nokkrum sinnum; það er upp í $A^x - 1$. Í tugakerfinu er það $9999\cdots$, í fjarkakerfinu er það $3333\cdots$. Samber (160, 4).

7. Þegar tala $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}\cdots$ hefir meðal sinna frumgjöranda nokkra, sem eru frumgjörendur kerfisumferðarinnar, og einnig aðra, sem ekki eru það, þá gengur framkvæmið af hinum fyrnefndu upp í stærð, sem táknast með forminu A^x, en hinir

síðari í annari í formúnu $A^y - 1$; N gengur þá upp í stærð, sem hefir form það, sem er framkvæmi beggja, nefnilega $(A^y - 1)A^x$. Sè A umferð tölukerfis, þá ritast talan, sem uppgengur í, með hæsta staf kerfisumferðarinnar rituðum y sinnum, og þar aptan við x núllum. Tökum vèr til dæmis töluna $2^3 . 5^2 . 3 = (2^3 . 5^2)3 = 600$; $2^3 . 5^2$ gengur upp í $(2 . 5)^3 = 2^3 . 5^3 = 1000$; og 3 ganga upp í $10^2 - 1$ (eptir fyrri hluta *Fermats theoremsins*) $= 99$. Þess vegna gengur $2^3 . 5^2 . 3$ upp í $99 . 1000 = 99000$. Þessi fyrirsetta tala $2^3 . 5^2 . 3$ gengur einnig upp í minni tölu, því 3 ganga upp í $10^1 - 1 = 9$, samkvæmt síðara hluta *Fermats theoremsins*; þess vegna gengur hún einnig upp í 9000. Að hin fyrirsetta tala 600 gengur upp í enn minni tölum, er vitanlegt. Hèr talast einungis um veldin af 10, og um *frummodulana* 999 .... Að heimfæra þetta upp á önnur kerfi, er hægt hverjum sem vill.

161. Leysa má verkefnið (10) á nokkuð annan veg, en þar er gjört. Vèr viljum til þessarar skoðunar nota *formúluna* (9). Hin gefna tala sè N, þá verður:

$$N = kU^\mu \dots eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a.$$

Reglan verður þá þessi: Deil N með umferðinni U, gengur þá U upp í öllum þeim liðum, sem U er *factor* í, en eininga-stafurinn a kemur þá fram sem *residuum* fyrstu deilingar. Kvóti fyrstu deilingar verður:

$$kU^{\mu-1} \dots eU^3 + dU^2 + cU + b. \quad \textit{Residuum} = a.$$

Deil þessum kvóta aptur með U, kemur þá b eða umferðatala fyrstu stèttar í *residuinu* annarar deilingar, en kvóti þeirrar deilingar verður:

$$kU^{\mu-2} \dots eU^2 + dU + c. \quad \textit{Residuum} = b.$$

Deil þessum kvóta enn með U, kemur c sem *residuum* þriðju deilingar, og kvóti

$$kU^{\mu-3} \dots eU + d. \quad \textit{Residuum} = c.$$

Deil honum með U, kemur d, sem er *residuum* fjórðu deilingar, en kvóti fjórðu deilingar er:

$$kU^{\mu-4} \dots + e, \quad \textit{Residuum} = d.$$

Kemur þá e eða *residuum* fimtu deilingar, o. s. frv.

Dæmi sè sama sem í (10), að rita ártalið 1855 í fimtarkerfi. Deilingarnar eru:

5) 1855	0	leif	1ta deilingar
5) 371	1	—	2ar —
5) 74	4	—	3ju —
5) 14	4	—	4ðu —
5) 2	2	—	5tu —
0.			

Ártalið í fimtarkerfi = 24410, eins og í (10). Nú má líka, ef vill, finna kvótana eptir bókstöfunum út af leifunum og veldunum af 5, sem er U; $\mu = 4$, því hæsta veldið af U er U^4. Deilingarnar og liðirnir eru 5, en seinasti liðurinn hefir ekkert U í tölunni N. Þá eru

deilingar	5ta	4ða	3ja	2ar	1ta
leifar þeirra	e	d	c	b	a
	2	4	4	1	0
kvótarnir	0	2	14	74	371.

Nú var eptir bókstöfunum

fyrstu deilingar kvóti $eU^3 + dU^2 + cU + b$
$2.5^3 + 4.5^2 + 4.5 + 1 = 371$

annarar deilingar kvóti $eU^2 + dU + c$
$2.5^2 + 4.5 + 4 = 74$

þriðju deilingar kvóti $eU + d$
$2.5 + 4 = 14$

fjórðu deilingar kvóti e
$2 = 2$

fimtu deilingar kvóti 0.

Til að ákvarða þannig sèrhvern kvóta, þarf leif næstþærri deilingar. Þess vegna þarf sjöttu deilingar leif til að ákvarða með þessum hætti fimtu deilingar kvóta, því leif sú er *coefficient* hans. Þessa leif er samt hægt að finna, með því að deila í sjötta sinn og draga frá deilanda þannig: 5 í 0 er 0 sinnum. Núllsinnum 5 er 0, frá 0 er 0. Sjöttu deilingar leif er því 0, og þar hún er *coefficient* fimtu deilingar kvóta, þá er sá kvóti = 0., Þessi útreikningur kvótanna er ekki til þess að finna þá, því þeir eru áður fundnir, heldur til að prófa þá og gegnumganga alla reikningsins króka.

162. Sèrhver tala verður uppleyst í eintóm veldi af 2, því ekki þarf annað til þess en að rita hana í tvistakerfi, og taka síðan veldin út af henni, t. d. ef leysa skal ártalið 1862 upp í tóm veldi af 2.

2)	1862	leif 0
2)	931	1
2)	465	1
2)	232	0
2)	116	0
2)	58	0
2)	29	1
2)	14	0
2)	7	1
2)	3	1
2)	1	1
	0.	

þá 1862 í tvistakerfi = 11101000110, það er

$$2^{10} + 2^{9} + 2^{8} + 2^{6} + 2^{2} + 2,$$

því tvistur 10du stèttar er 2^{10}, o. s. frv. Vilji eg finna veldin útreiknuð, þá eru þau þessi:

	2^{10} =	1024
	2^{9} =	512
	2^{8} =	256
	2^{6} =	64
	2^{2} =	4
	2^{1} =	2
samtals	=	1862.

þegar talan er oddatala, þá verður fyrsta leifin = 1, sem er einingastafurinn, en þessi eining eða $1 = 2^0$, svo hún er líka nokkurs konar veldi af 2.

163. Sèrhver tala verður einnig uppleyst í *positif* og *negatif* veldi af 3, og þar til þarf ei annað en rita hana í þristakerfi. En einungis gæta þess, að þegar leif ætlar að koma = 2, þá að auka kvótann um 1, svo leifin verði þá = — 1, t. d. 1862.

$$
\begin{array}{l}
3)\underline{1862}\ \text{leif} - 1 \\
3)\underline{\ 621}\ \cdots\cdots\ 0 \\
3)\underline{\ 207}\ \cdots\cdots\ 0 \\
3)\underline{\ \ 69}\ \cdots\cdots\ 0 \\
3)\underline{\ \ 23}\ \cdots - 1 \\
3)\underline{\ \ \ 8}\ \cdots - 1 \\
3)\underline{\ \ \ 3}\ \cdots\cdots\ 0 \\
3)\underline{\ \ \ 1}\ \cdots + 1 \\
\ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

þá 1862 í þristakerfi $= 10\bar{1}\bar{1}000\bar{1}$. þar sem leifarnar eru *negatifar,* skrifast hèr *minusarnir* upp yfir þeim. Veldin eru þá:

$$
3^7 - 3^5 - 3^4 - 3^0 \qquad
\begin{array}{rr}
3^7 = & 2187 \\
-3^5 = & -\ 243 \\ \hline
 & 1944 \\
-3^4 = & -\ \ 81 \\ \hline
 & 1863 \\
-3^0 = & -\ \ \ 1 \\ \hline
 & 1862.
\end{array}
$$

Tugabrot (*Fractio decimalis*).

164. Tugabrot (*fractio decimalis*) er það brot, sem hefir fyrir nefnara tugaveldi, eða 1 með núllum aptan við, en teljarinn má vera hvaða tala sem vera skal, þó eptir vissum reglum. þessi brot skrifast með sèrlegum hætti, eins og framhald tugakerfisins, til hægri handar frá heilu tölunni, ef nokkur er, og greinast frá henni með kommu, en nefnarinn skrifast ekki, því menn vita hann eptir reglunum. Eins og í heilu tölunni hver stafur merkir 10 sinnum minna við hvert sæti, sem hann færist nær hægri hendi, svo er einnig líka í tugabrotunum, t. d. 32,4923 eru 32 heilir, 4 tíundu partar, 9 hundruðustu partar, 2 þúsundustu partar, og 3 tíuþúsundustu partar $= 32 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{3}{10000} = 32\frac{4923}{10000}$, því eins og stafurinn í einingasæti þýðir 10 sinnum minna en ef hann væri í tugasæti, svo er og stafurinn næsti eptir kommuna 10 sinnum minni að gildi en ef hann stæði næst fyrir framan kommuna. Hann telur þar tíundu parta, sem eru 10 sinnum minni en einingarnar. Eins og nú næsti stafur eptir kommuna telur tíundu parta, svo telur

og annar stafur eptir kommuna 10 sinnum lægri stètt en hinn fyrsti, hann telur hundruðustu partana, hinn þriðji þúsundustu partana, sem eru 10 sinnum minni en hundruðustu partarnir, o. s. frv. Stafirnir fyrir aptan kommuna heita tugabrotsstafir (*decimales) dicimalar.* Sè engin heila talan, er sett 0 fyrir framan kommuna, svo sem $0,4 = \frac{4}{10}$. Til að sjá, hver nefnarinn er, þá er ætíð sú regla, að í nefnaranum sè eins mörg núll sem *decimalarnir* eru, og svo 1 fyrir framan þessi núll t. d. $0,49 = \frac{49}{100}$, $0,492 = \frac{492}{1000}$; $0,4923 = \frac{4923}{10000}$; þar má skrifa 0 undir hvern staf og síðan 1 fyrir framan. Sè of fáir stafir í teljaranum, til þess að þessi regla geti gilt, þá er sett núll fyrir framan teljarann, svo mörg, að teljarinn með núllunum fyrir framan verði eins margir *decimalar* sem núllin í nefnaranum, svo sem $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{1}{1000} = 0,001$; $\frac{1}{10000} = 0,0001$. Ekki má setja þessi fyllingarnúll fyrir aptan teljarann, því það raskar brotinu, því 0,10 þýðir ekki $\frac{1}{100}$, heldur $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; 0,100 þýðir $\frac{100}{1000} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Það raskar öldungis ekki brotinu, þó bætt sè núllum aptan við það, því þá bætist í lestrinum eins mörg núll aptan við nefnara þess. Þannig er $0,6 = 0,60 = 0,600 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{600}{1000}$, o. s. frv.

165. Sè komman flutt úr sínum stað til hægri um nokkra stafi, þá tífaldast talan við hvern staf, sem hún er færð yfir, því þá verða tíundu partarnir að heilum einingum, hundruðustu partarnir að tíundu pörtum o. s. frv., t. d. sè komman í 32,4923 færð til hægri aptur fyrir 4, þá verður úr tölunni $324,923 = 324\frac{923}{1000}$. Sè komman færð yfir 9, kemur $3249,23 = 3249\frac{23}{100}$, sè hún færð yfir 23, þá kemur 324923, og verður þá öll talan heil. Sè þar á mót komman færð til vinstri, þá minkar talan tífalt við hvern staf, svo 32,4923 verður $3,24923 = 3\frac{24923}{100000}$; sè hún færð fram fyrir alla töluna, þá verður hún öll að broti, og verður þá að setja 0 fyrir framan, þannig: $0,324923 = \frac{324923}{1000000}$.

166. Samlagning tugabrota gjörist eptir (20), með því (til hægðar) að rita tölurnar hverja undir aðra, þannig að sömu stèttar einingar standi hver niður undan annari. Standast þá allar

kommurnar á. Einingastafirnir standast á vinstra megin næst kommunum, tíundu partarnir hægra megin við þær, o. s. frv. Tölurnar kunna þá að ná ójafnt til hægri og vinstri handar. Að þessu búnu byrja menn hægra megin að leggja saman. Þær einingastèttir, sem lengst ganga til hægri, leggjast fyrst saman, og skrifast undir strykið svo langt frá kommunnar sæti, sem stètt þeirra svarar. Þetta geta menn sèð með því að telja sætin í samanlögðu tölunum til kommunnar.

Dæmi: Leggjum saman tölurnar 3,0021 + 12,999 + 0,9 + 412,000096 + 0,000004. Til hægðar ritum vèr þær þannig:

$$
\begin{array}{r}
3{,}0021 \\
12{,}999. \\
0{,}9\ldots \\
412{,}00096 \\
0{,}000004 \\
\hline
428{,}902064.
\end{array}
$$

Hèr gengur neðsta talan lengst til hægri. 4, sem er milliónustu partar, skrifast því í 6ta sæti frá kommunni. Þar næst 6 niður í 5ta sæti, þar ekkert á þar við að leggjast. Nú má segja: 9 og 1 er 10, það er hin 4ða stètt frá kommunni, skrifast 0 í summuna í 4ða sæti frá kommunni. 1 geymdur og 9 er 10, og 2 er 12, þetta eru þúsundustu partar. 2 skrifast því niður í summuna í 3ja sæti frá kommunni. 1 og 9 er 10, það eru hundruðustu partar, skrifast því 0 í annað sæti frá kommunni. 1 og 9 er 10 og 9 er 19; þetta eru tíundu partar; 9 skrifast í næsta sæti við kommuna, en 1 er heil tala og legst því við einingarnar í heilu tölunum, og þær reglur höfum vèr sèð áður.

Sè tölurnar litlar, eða vilji menn ekki skrifa þær hverja undir aðra, þá verður jafnframt nákvæmlega að telja sæti hvers tölustafs frá kommunni, svo menn ekki fari stètta vilt.

Tugabrot má einnig gjöra samnefnd, og það með því að bæta núllum aptan við hvert þeirra, svo mörgum, að allir *addendarnir* fái jafnmarga *decimala*. En vitanlegt er það, að brotin raskast ekki fyrir það (164), þar nefnurunum bætast eins mörg núll sem teljurunum, svo teljari og nefnari hvers brots margfaldast þá með sama tugaveldi (83).

Í ofanskrifuðu dæmi hefir lengsta brotið 6 *decimala;* vèr skrifum þá allar tölurnar upp með 6 *decimölum,* þannig:

3,002100	Efsta brotið hafði áður 4 *decimala,* og taldi þá
12,999000	tíuþúsundustu parta og nefnari þess var þá
0,900000	10000 eða 1 með 4 núllum. Nú bætast við
412,000960	það brot tvö núll, svo *decimalarnir* eru nú 6
0,000004	og telja millíónustu parta. Nefnarinn er því orð-
428,902064.	in millíón eða 1 með 6 núllum. Með sama

hætti eru öll brotin orðin að millíónustu pörtum.

167. Frádragning í tugabrotum er eins og í heilum tölum, eptir að búið er að raða brotunum eins og í samlagningu tugabrota. Hafi *minuendus* færri *decimala* en *subtrahendus,* má, ef vill, fylla skarðið með núllum; en þess er raunar ekki þörf, því það nægir að hugsa sèr núllin, og aðgæta, að núllin verða að álítast sem 9, þegar búið er að taka til láns, samber (27), Sè *subtrahendus* stærri en *minuendus,* þá *subtraherast minuendus* frá *subtrahendus,* verður þá mismunurinn *negatif.* En hvor þeirra sem stærri er, þá fær mismunurinn eins marga *decimala,* sem sú talan, er hafði þá fleiri.

Dæmi:

5,367304	7,259	4,537
—0,35263	—2,52846	—7,4292
5,014674.	4,73054.	—2,8922.

Í öðru dæminu má svo taka til orða: 6 frá 10 er 4, er skrifast. 4 frá 9 (því lánað var af 0 eða 10) er 5, skrifast. 8 frá 8 er 0, o. s. frv.

168. Margföldun í tugabrotum. Tölurnar margfaldast fyrst saman, eins og engin komma væri í þeim; en í *productinu* verða eins margir *decimalar* sem í báðum gjöröndum til samans. Þessa má þá afskera með kommu aptan af framkvæminu. Verði núll seinast í framkvæminu, eitt eða fleiri, má varpa þeim burt, þegar búið er að setja kommuna.

Dæmi: 5,43 $\times$ 0,23. Fyrst margfaldast saman 543 $\times$ 23 $=$ 12489. Síðan teljast *decimalarnir* í gjöröndunum, þeir eru 4, nefnilega 2 í hvorum. Þar skerast þá 4 *decimalar* aptan af framkvæminu, verður hið rètta framkvæmi þessara tugabrota $=$ 1,2489.

Sönnun. Skrifa má gjörendurna eins og almenn brot og margfalda þau svo saman, þannig:

$$\frac{543}{100} \times \frac{23}{100} = \frac{12489}{10000} = 1{,}2489.$$ Samber (95, 3) og (62).

2að dæmi: 138,5 × 7,695708.

$$\begin{array}{r} 7695708 \\ \underline{1385} \\ 38478540 \\ 61565664\,. \\ 23087124\,.\,. \\ \underline{7695708\,.\,.\,.} \\ 10658555580. \end{array}$$

Hèr eru 7 *decimalar* til samans í báðum gjörðndum; þess vegna sker eg 7 *decimala* aptan af *productinu*, og fæ 1065,8555580. þessu núlli get eg á eptir kastað burt, ef eg vil, þegar eg er búinn að afskera þá 7 *decimala* og setja kommuna. Brotin skrifuð sem almenn brot eru:

$$\frac{1385}{10} \times \frac{7695708}{1000000} = \frac{1065855558|0}{1000000|0} = \frac{1065855558}{1000000}.$$

Hèr sjáum vèr, að öll eru verkin sömu í margföldun hvorratveggja brotanna, og þar í liggur sönnunin.

3ja dæmi: 0,007853 × 0,00476.

Fyrst er að margfalda saman 7853 × 476 = 3738028. Síðan tel eg tugabrotsstafina í báðum gjöröndunum, og eru þeir 11 til samans; eg á þá að skera 11 stafi aptan af *productinu*, en í því eru alls ekki nema 7; hvernig á eg nú að fara að? Eg verð að hlýða lögmálinu og telja mèr það í núllum, sem 7 vantar á 11; eg skrifa þá 4 núll framan við hið fengna *product*, og það á alt að verða *decimalar;* en síðan skrifa eg kommu þar fyrir framan, og loksins núll lengst til vinstri handar í stað heilu tölunnar; kemur þá hið rètta *product* tugabrotanna 0,00003738028. Að þetta sè samkvæmt margföldun almennra brota, sèst, ef vèr skrifum tugabrotin eins og almenn brot, þannig:

$$\frac{7853}{1000000} \times \frac{476}{100000} = \frac{3738028}{100000000000}.$$

Eins og núlla talan samanlögð í nefnurum gjörandanna er jöfn núllatölunni í nefnara framkvæmisins, svo er *decimala*talan úr báðum gjöröndum jöfn *decimala*tölu framkvæmisins.

169. Deiling tugabrota. Fyrst aðgætist, hvort deilandi hefir eins marga *decimala* sem deilir; sè það ekki, þá bætast aptan við deilanda núll í *decimala* stað, svo hann að minsta kosti hafi jafnmarga *decimala* sem deilir. Síðan er deilt eins og engin komma væri. Hafi deilandi fleiri *decimala* en deilir, hvort heldur viðbætta eður óviðbætta með núllum, þá afskerst aptan af kvótanum svo margir *decimalar*, sem deilandi hefir fram yfir deili.

Dæmi hèr upp á sè fyrsta margföldunardæmið (168), notað sem deilingardæmi:

1,2489 : 0,23.

Hèr eru 4 *decimalar* í deilanda, en ekki nema 2 í deili. Þá deili ég eins og engin komma væri.

23) 12489 (543 Hèr hefir deilandi 2 *decimalá* fleiri en deilir; þess vegna afskerast 2 *decimalar* af kvótanum, sem kominn er. Verður þá kvóti tugabrotanna = 5,43, eins og áður var *multiplicandus* í (168), sem er rètt, þar deilir × kvóti = *multiplicandus*; 0,23 × 5,43 = 1,2489 og þess vegna 1,2489 : 0,23 = 5,43.

```
12489 (543
115
  98
  92
   69
   69
```

Þetta má og skoðast sem deiling almennra brota; þá er

$$\frac{12489}{10000} : \frac{23}{100} = \frac{12489}{10000} \times \frac{100}{23}; \text{ samber (98, 3)}$$

$$= \frac{1248900}{230000} = \frac{12489}{2300} = \frac{12489}{23.100} = \frac{543}{100} = 5{,}43.$$

Hvað *decimala*fjölda kvótans snertir, má sanna regluna þannig: þar deilir og kvóti margfaldaðir saman eiga að gefa deilanda, þá verður summa *decimala*talna *divisors* og kvóta = *decimala*tölu deilanda, og aptur á mót *decimala*fjöldi kvótans = mismun *decimala*talna deilanda og deilis (25).

2að Dæmi: 56,4 : 0,00015. Fyrst gjöri eg *decimala*deilanda jafnmarga *divisors*, kemur 56,40000 : 0,00015; og við þetta raskast ekki stærðirnar (166). Síðan kasta eg kommunum burt úr báðum; það gjörir hèr sama sem að flytja þær yfir 5 stafi til hægri, og við það margfaldast báðar tölurnar með $10^5 = 100000$ eptir (165), en kvótinn breytist ekki við það (83); þess vegna:

$$\frac{56{,}4}{0{,}00015} = \frac{56{,}40000}{0{,}00015} = \frac{56{,}40000 \,.\, 10^5}{0{,}00015 \,.\, 10^5} = \frac{5640000}{15} = 376000.$$

Hèr kom þá heil tala út, þar jafnmargir tugabrotsstafir voru í deili og deilanda, þegar deilt var 56,40000 með 0,00015; þar voru nefnilega 5 *decimalar* í hvorum; þess vegna eptir reglunni, sem gefin er fyrir kommunni, 5 — 5 = 0; það þýðir, að 0, það er: enginn tugabrotsstafur, sè í kvóta. Hið sama segir deilingin 5640000 : 15, því þar er *decimala*talan í deilanda og deili = 0 og 0 — 0 = 0 segir, að enginn *decimal* sè í kvóta. Menn geta eptir þessari reglu, hvenær sem vill í deilingunni, sèð, hvort nokkur eða enginn tugabrotsstafur er kominn eða hvað langt er til þess hann kemur, eða hvað margir *decimalar* eru komnir.

þannig var í þessu dæmi, þegar 56,4 : 0,00015, eða þegar búið var að deila 564 með 15, tugabrotsstafafjöldinn í *dividendus* = 1, en í *divisor* = 5, þá var eptir reglunni 1 — 5 = — 4, það þýðir, að 4 stafi vanti enn til kommunnar, en kvótinn, sem þá var kominn, var 37, og leif = 9. Þegar þá hið fyrsta viðbætta núll var niðurfært til leifarinnar, kom 90, og þegar þessu er deilt með 15, kemur kvótastafurinn 6, og engin leif; verður því að fylla það, sem vantar í kvótann, með núllum. Hinn deildi deilandi var þá orðinn 56,40, en deilir 0,00015; þess vegna: 2 — 5 = — 3, það er, að enn vanti 3 stafi í heila tölu kvótans, og það eru 3 núll. Stundum er það líka, að aldrei gengur upp, hvað lengi sem deilt er; halda menn þá að eins svo lengi áfram, sem tilgangi reikningsins nægir, og ekki verður lengur skaði að skakkanum, sem alt af fer minkandi. Þetta sèst betur á næsta dæmi.

3ja dæmi: 3,74 : 2,4

$$
\begin{array}{r}
2{,}4)\,3{,}74\,(1{,}55833\cdots \\
\underline{24} \\
134 \\
\underline{120} \\
140 \\
\underline{120} \\
200 \\
\underline{192} \\
80 \\
\underline{72} \\
80 \\
\underline{72} \\
8
\end{array}
$$

o. s. frv.

Þegar hèr var búið að deila 3,7 með 2,4, þá voru jafnmargir *decimalar* í deili og hinum deilda deilanda; þess vegna: 1 — 1 = 0, það er: enginn tugabrotsstafur enn kominn í kvótann, heldur einungis öll heila talan = 1; hèr var því hið rètta sæti kommunnar. Næsti stafur deilanda 4 færast niður til leifarinnar 13, verður 134; þessu er deilt með 24, kemur 5 í kvóta, og er það fyrsti *decimal* kvótans, því 2 — 1 = 1 eptir sætisreikningi kommunnar. Nú er leif 14, en enginn stafur eptir í hinum gefna deilanda. En til að ákvarða kvótann nákvæmar, bætist nú núll aptan við leifina, kemur 140. Þessu er deilt með 24, fæst kvóta-

stafur 5 annað sinn, og skrifast. Nú get eg aptur skoðað sætisreikning kommunnar og er hann 3 — 1 = 2, því nú eru 3 tugabrotsstafir í hinum deilda deilanda, en 1 í deili. Þetta segir mèr, að nú sè komnir 2 *decimalar* í kvótann. Þannig má alt af sjá, hvað margir tugabrotsstafir eru komnir. Seinna í dæmi þessu sjáum vèr, að sama leif = 8 fer að koma aptur, og alt af bætist 0 aptan við hana, svo að þegar 80 er alt af deilt með 24, kemur kvótastafurinn 3 án afláts, svo aldrei gengur upp.
Kvótinn verður því 1,558333····

4. Dæmi: 4,5896 : 367.

```
367) 4,5896 (0,01250572····
     367
     ---
      919
      734
     ----
      1856
      1835
      ----
        2100
        1835
        ----
         2650
         2569
         ----
           810
           734
           ---
            76.
```

Hèr er bætt núllum aptan við, þegar hinn gefni deilandi þrýtur. Deilingin gengur aldrei upp, þó áfram sè haldið. *Decimalarnir* í deilanda seinast eru hèr 8, en í deili enginn, því hann er heil tala; þess vegna er sætisreikningur kommunnar 8 — 0 = 8, og 8 *decimalar* í hinum fengna kvóta.

Nú viljum vèr prófa þessa deilingu með almennum brotum. Skrifum vèr deilanda 4,5896 sem alment brot, verður hann $4\frac{5896}{10000}$. Stytta má brot þetta nokkuð, því teljarinn 5896 = 2 . 2 . 2 . 11 . 67, en nefnarinn 10000 = 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 5 . 5 . 5 (113). Hèr eru þrír af *factorunum* sameiginlegir teljara og nefnara, nefnilega 2 . 2 . 2 = 8; má því stytta brotið með 8 (122) (85); verður það þá $\frac{737}{1250}$ og allur deilandi $4\frac{737}{1250}$. Hann gjörum vèr að launbroti = $\frac{5737}{1250}$ (82), og deilum honum með deilinum 367, eptir (98), en þar 367 gengur ekki upp í teljaranum 5737, látum vèr hann óbreyttan, en margföldum nefnarann 1250 með 367;

kemur 458750, svo kvótinn verður í almennum brotum $= \frac{5737}{458750}$; þetta brot getum vèr skoðað sem kunngjörða deilingu; og deilum 5737 með 458750, og látum kvótann verða tugabrot, þannig:

```
458750) 5737,00 (0,01250572....
        458750
        1149500
         917500
         2320000
         2293750
          2625000
          2293750
           3312500
           3211250
           1012500
            917500
             95000.
```

Hèr sè eg, að eg verð strax að bæta við deilanda 2 núllum til að fá annað í kvóta en núll; verður þá kvótastafurinn 1, og eptir sætisreikningnum 2 — 0 = 2 er þetta hinn annar *decimal* í brotinu; og þegar eg held áfram deilingunni, kemur öldungis sama tugabrot sem í fyrra sinni, svo almennu brotunum ber saman við tugabrotin í þessum reikningi.

5ta Dæmi: 1 : 3,2561047.

```
3,2561047) 1,00000000 (0,30711543....
           97683141
           231685900
           227927329
            37585710
            32561047
             50246630
             32561047
             176855830
             162805235
             140505950
             130244188
             102617620
              97683141
               4934479.
```

Til að fá merkjanda staf í kvóta (annan en 0), varð hèr að bæta 8 núllum við *dividendus*. Þessi kvótastafur er 3; og er hann hinn fyrsti *decimal* kvótans, því 8 — 7 = 1 eptir sætisreikningnum. Hinn seinasti hèr fengni *decimal* er hinn 8di, því 15 — 7 = 8. Prófa má brot þetta eins og hið fyrra; en eg vil viðhafa langt skemri aðferð þar til, en þá var höfð, og stytta nú ekki almenna brotið. Eg skrifa fyrst deilinguna kunngjörða í brotslíki, þannig: $\frac{1}{3,2561047} = \frac{10000000}{32561047}$.

Þegar eg vil deila þessum tölum og láta útkoma tugabrot eins og í 4ða dæminu, þá koma allar sömu athafnir og allar sömu tölur, sem þá eg deildi 1 : 3,2561047, svo þar getur ekkert reglulegt talnapróf orðið. Samt sýnir það, að athafnirnar eru rètt valdar, og er því reglunnar sönnun. Ekki verður heldur brotið stytt, þó eg vildi snúa mèr að því, því teljari og nefnari hafa hèr engan sammæli, og er það sjáanlegt á því, að teljarinn 10000000 hefir engar frumtölur í sèr, nema 2 og 5, en nefnarinn 32561047 hefir þær alls ekki, eptir deilileikseinkunnunum. Mèr eru þá flestir vegir bannaðir til að prófa þenna reikning. Leifaprófin get eg samt notað, því hèr er bæði deilir = 32561047, kvóti 30711543 og leif 4934479, samt deilandi 1000000000000000, og þau segja reikninginn rèttan. Vèr getum annars, ef viljum hafa frekari samburð, breytt brotinu $\frac{10000000}{32561047}$ í $\frac{10000000}{32561048}$; verður það þá dálítið minna, en svo getum vèr stytt þetta nýja brot með 8, kemur $\frac{1250000}{4070131}$, og þetta brot getum vèr gjört að tugabroti:

```
4070131) 1250000,0 (0,30711542
         12210393
         --------
          28960700
          28490917
          --------
            4697830
            4070131
            -------
             6276990
             4070131
             -------
             22068590
             20350655
             --------
              17179350
              16280524
              --------
                8988260
                8140262
                -------
                 847998.
```

þetta brot mismunar í hundraðmilliónustu pörtunum frá hinu fyrra. Vèr getum annars sèð, hvað þessi brot mismuna í almennum brotum, með því að gjöra þau samnefnd, þannig:

$$\frac{10000000}{32561047} - \frac{10000000}{32561048} =$$

$$\frac{325610480000000 - 325610470000000}{32561047 \; . \; 32561048} \; .$$

$$\begin{array}{r} 325610480000000 \\ 325610470000000 \\ \hline 10000000 \end{array}$$ mismunur teljaranna

$$\overline{32561047 \; . \; 32561048.}$$

Sè þessir *factorar* margfaldaðir saman, nefnilega 32561047 og 32561048, og það framkvæmi sett í nefnara stað undir teljarann 10000000, þá er fengið brot, sem nákvæmlega segir mismun hinna umtöluðu brota; má og, ef vill, stytta það með teljara sínum, svo teljarinn verði 1; deilingin gjörist þá eptir (62), eða kvótinn er látinn verða tugabrot. Má þá sleppa brotinu, en halda heilu tölunni. Þá er komið brot með teljara = 1, og nefnara = heilu tölunni, og segir það mismuninn allnákvæmlega. Sè menn ánægðir með að vita mismun brotanna hèr um bil, má deila öðrumhvorum *factornum* 32561047 eða 32561048 með teljaranum 10000000 eptir (62) og láta kvótann verða tugabrot, margfalda hinn *factorinn* með honum, eða nokkrum stöfum framan af honum, varpa svo burt brotinu, sem verður í *productinu*. Þá kemur brot, er hefir 1 fyrir teljara, en heilu töluna í *productinu* fyrir nefnara. Í þessu dæmi verður þetta

$$= \frac{1}{3{,}2561047 \; . \; 32561048.}$$

Kasti eg í burt 2561047 úr fyrra *factornum,* og margfaldi síðan síðara *factorinn* með 3 heilum, kemur

$$\frac{1}{97683144}$$

og verður þetta mjög nálægt hinu mismunanda broti, því

$$\begin{array}{l} 97683144)\; 1{,}00000000 \;(0{,}0000000\dot{1} \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \underline{97683144} \end{array}$$

Þetta er þá 1 hundraðmilliónasti partur, eins og tugabrotin áður sýndu.

170. Tugabrotin viljum vèr nú hugleiða nánar eptir bókstafa-

reikningi. Vèr höfum þegar sèð, hvernig tölustafirnir bæði í heilu tölunni og brotinu merkja 10 sinnum minna, eptir því sem sæti þeirra færist staf fyrir staf nær hægri hendi (164). Þetta gildir einungis í tugakerfinu. En í hinum öðrum kerfum breytist þetta eptir umferðunum, svo umferðin ræður þessu í hverju kerfi fyrir sig, en aðalreglan er þó ætíð eins í þeim öllum. Vèr höfum (9) táknað tölu í öllum kerfum þannig:

$$kU^{\mu}\cdots eU^4 + dU^3 + cU^2 + bU + a.$$

Nú viljum vèr, vegna þess sem á eptir kemur, og líka til að nota sömu bókstafi sem aðrir ritarar, taka oss aðra bókstafi til að tákna sama með, nefnilega:

$$\cdots a_4A^4 + a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a.$$

Hèr táknast tölustafirnir með *indexum* reiknuðum frá einingastafnum a, sem hefir engan *index*, nema ef vill núll, þannig a_0, en kerfisumferðin táknast með A, og köllum vèr þá kerfið A-tölukerfi. Þetta vonum vèr að alt sè skiljanlegt, þegar það er nákvæmlega borið saman við tölulið (9). Þessi formúla táknar nú heila tölu, eins og vèr vitum, en svo er hægt að framhalda henni til hægri handar til að tákna tugabrot eða A-tölubrot, þannig:

$$\cdots a_2A^2 + a_1A + a_0 + a_1A^{-1} + a_{-2}A^{-2} + a_{-3}A^{-3}\cdots$$

Hèr er a_0 einingastafurinn, eins og áður, a_{-1} er fyrsti *decimal* eða fyrsti A-tölubrotsstafur, a_{-2} annar, o. s. frv., svo *indexarnir* vaxa á báðar síður, *positift* til vinstri, en *negatift* til hægri. Þetta sýnir framhald A-tölukerfisins til hægri, líkt og áður er sagt (164).

171. Vèr viljum nú skoða, hvernig A-tölubrotin framkoma, og taka til dæmis töluna

$$p = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} \cdots a_1a_0\,;$$

eru þar tölustafirnir skrifaðir hver hjá öðrum, eins og venjulegt er í tölum (9). Þetta er þá tala með $n+1$ tölustöfum. Setjum hún væri í tugakerfi þessi:

$$p = 64598367.$$

Hèr er $n = 7$, stafafjöldinn $n + 1 = 8$. Til að sjá fljótlega, hvað þeir heita í bókstöfunum, skrifa eg bókstafi með *indexum* og þar undir tölustafina:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	a_{n-4}	a_{n-5}	a_{n-6}	a_{n-7}
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
6	4	5	9	8	3	6	7.

Nú tek eg A-töluveldi (tugaveldi) $A^r = 10^5 = 100000$, og deili tölunni p þar með þannig:

$$\frac{p}{q} = \frac{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}{A^5}$$

eða, ef þetta er skrifað með $+\,+$ og A-veldum,

$$\frac{p}{q} = \frac{a_7 A^7 + a_6 A^6 + a_5 A^5 + a_4 A^4 + a_3 A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0}{A^5},$$

þá verður, af því $n > r$

$$\begin{aligned}
\frac{a_7 A^7}{A^5} &= a_7 A^2 &&= a_n A^2 &&= a_n A^{n-r} \\
\frac{a_6 A^6}{A^5} &= a_6 A &&= a_{n-1} A &&= a_{n-1} A^{n-r-1} \\
\frac{a_5 A^5}{A^5} &= a_5 &&= a_{n-2} &&= a_r \\
\frac{a_4 A^4}{A^5} &= a_4 A^{-1} &&= a_{n-3} A^{-1} &&= a_{r-1} A^{-1} \\
\frac{a_3 A^3}{A^5} &= a_3 A^{-2} &&= a_{n-4} A^{-2} &&= a_{r-2} A^{-2} \\
\frac{a_2 A^2}{A^5} &= a_2 A^{-3} &&= a_{n-5} A^{-3} &&= a_{r-3} A^{-3} \\
\frac{a_1 A}{A^5} &= a_1 A^{-4} &&= a_{n-6} A^{-4} &&= a_{r-4} A^{-4} \\
\frac{a_0}{A^5} &= a_0 A^{-5} &&= a_{n-7} A^{-5} &&= a_{r-5}\, A^{-5} = a_0 A^{-r}
\end{aligned}$$

Hin kunngjörða deiling $\frac{p}{q}$, þar sem *polynomium* er í deilanda, en *monomium* A^5 í deili, framkvæmist hèr, eins og þar á eptir segir, í dálkum. Hvað *polynomium* snertir, gjörist deilingin eptir (61).

Í fyrsta dálki er tekið hvert *monomium* eptir annað, og því deilt eptir (63,4) alt frá $\frac{a_7 A^7}{A^5}$ til $\frac{a_0}{A^5}$ í þessu sèrstaka talnadæmi, sem hèr er einungis viðhaft til skilningsauka. En í hinu almentgildanda bókstafadæmi byrja þessar deilingar með $\frac{a_n A^n}{A^5}$ eða fyrsta lið deilanda, hver sem hann er, deildum með *divisor* A^r; og halda þar áfram til $\frac{a_0}{A^5}$ eða einingastafs tölunnar, er deilist með *divisor* eða A-töluveldinu A^r. Þessi er hinn seinasti liður, því nú er öll talan uppunnin.

Í öðrum dálki standa allir kvótarnir af þessum deilingum, sem

gilda einungis fyrir $n = 7$ og $r = 5$. Þeir byrja með $a_7 A^2$ og enda með $a_0 A^{-5}$ í þessu sèrstaka talnadæmi, eða ef sjálfir tölustafirnir viðhafast og tugakerfið er valið, þá verður röð kvótanna þessi:

$$6 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 5 \,.\, 10^0 + 9 \,.\, 10^{-1} + 8 \,.\, 10^{-2} + 3 \,.\, 10^{-3} + 6 \,.\, 10^{-4} + 7 \,.\, 10^{-5} = 600 + 40 + 5 \,.\, 1 + 9 \,.\, \frac{1}{10} + 8 \,.\, \frac{1}{100} + 3 \,.\, \frac{1}{1000} + 6 \,.\, \frac{1}{10000} + 7 \,.\, \frac{1}{100000} = 600 + 40 + 5 + 0{,}9 + 0{,}08 + 0{,}003 + 0{,}0006 + 0{,}00007 = 645{,}98367.$$

Væri þetta í tylftakerfi, þá væri skriptin eins, en læsist kann ske þannig: 6 tylftir annarar stèttar, 4 tylftir fyrstu stèttar, sem eru tylftir, 5 einingar, 9 tólftungar, 8 tólftungar annarar stèttar, 3 tólftungar þriðju stèttar, 6 tólftungar fjórðu stèttar og 7 tólftungar fjórðu stèttar. En verið getur, að öðrum þóknist að hafa nöfn þessi öðruvísi.

Í þriðja dálki sèst, hvernig *indexarnir* fara minkandi frá n til $n - 7$. Þar verður a_{n-2} hinn nýi einingastafur kvótans, því A er þá komið niður í núllta veldi eða $A^0 = 1$. Þessi dálkur gildir ekki nema í því sèrstaka tilfelli: $n - r = 2$.

Fjórði dálkur kemur næst almenna forminu með því að byrja á $a_n A^{n-r}$, og enda á $a_{r-5} A^{-r}$, en samt er hann takmarkaður við sèrstök tilfelli. En skyldi hann verá alment gildandi og sýna kvótann, þá ætti kvótinn að byrja þannig:

$$a_n A^{n-r} + a_{n-1} A^{n-r-1} + a_{n-2} A^{n-r-2} + a_{n-3} A^{n-r-3} \ldots.$$

Indexarnir við a fara minkandi, unz þeir eru stignir niður í r; þá verður í hinu almenna formi að kenna þá við r úr því, unz þeir eru orðnir $= 0$ og er þá einingastafur deilanda kominn. *Exponentarnir* við A byrja með $n - r$, halda svo áfram minkandi, $n-r-1$ eða $(n-r)-1$, $(n-r)-2$, $(n-r)-3 \cdots$, þangað til *subtrahendus* í þeim er orðinn $= (n-r)$ eða með öðrum orðum: þangað til *exponent* kemur, sem er $(n-r) - (n-r) = 0$; þá hverfur bókstafurinn A í þeim lið; er þá kominn einingastafur kvótans. Síðan kemur A aptur með *negatífum exponentum* -1, $-2, \cdots$ þangað til loksins kemur $-r$. Kvótinn verður þá:

$$a_n A^{n-r} + a_{n-1} A^{n-r-1} + a_{n-2} A^{(n-r)-2} + a_{n-3} A^{(n-r)-3}$$
$$\cdots\; a_r + a_{r-1} A^{-1} + a_{r-2} A^{-2} \cdots\; a_0 A^{-r}.$$

Einingastafurinn er við deilingu þessa fluttur frá 0[ta] sæti til r[ta] eða breyttur frá a_0 til a_r eða fluttur um r sæti, samber (165). En *subtrahendus* í *indexunum* eða sætisvísunum segir hèr til í brotinu, hver stafur brotsins hann (stafurinn) sè, svo sem a_{r-2} er annar stafur brotsins frá kommunni, og þetta er, þangað til kominn er stafurinn $a_{r-r} = a_0$, sem er hinn seinasti stafur í brotinu og tölunni. Þar á mót sýnir allur *index* svo sem r—2 í a_{r-2}, að stafurinn sè hinn (r—2)[ar] frá seinasta staf brotsins eða frá a_0. Í heilu tölunni sýnir *subtrahendus* í *indexunum* sætið frá fyrsta staf tölunnar svo sem a_{n-2} er hinn annar frá fyrsta staf, sem heitir a_n, en allur *index* n—2 segir stafsins sæti frá seinasta staf tölunnar og brotsins með. Þetta sèst alt á tölunni, sem vèr tókum til dæmis í þessum tölulið (171) upphaflega, sem var

$$p = 64598367,$$

sem eptir deilinguna með $q = A^5 = 10^5 = 100000$ varð

$$\frac{p}{q} = 645{,}98367.$$

Nefnum vèr tölustafina með bókstöfum, verða þeir

	6	4	5,	9	8	3	6	7
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$\cdots$	a_{r+2}	a_{r+1}	a_r	a_{r-1}	a_{r-2}	a_{r-3}	a_{r-4}	a_{r-5}.

Í heilu tölunni kvótans þýðir síðari *addendus* í *indexunum* fjarlægðina stafsins frá hinum nýja einingastaf, svo sem 2 í a_{r+2}, að a_{r+2} sè hinn annar til vinstri frá einingastafnum nýja, en allur *index* $r+2$, að það sè $r+2$ stafur talinn frá hinum forna einingastaf tölunnar. Vilji menn kenna *indexana* við n, þá verður að taka mismuninn

$$n - r = c;$$

þar af leiðir

$$n = c + r = r + c$$

og

$$r = n - c.$$

Eptir þessu má gefa kvótanum þetta almenna útlit:

$a_n A^c + a_{n-1}A^{c-1} + a_{n-2}A^{c-2} + a_{n-3}A^{c-3} \ldots a_{n-c} +$
$a_{n-c-1}A^{-1} + a_{n-c-2}A^{-2} + a_{n-c-3}A^{-3} \ldots a_0 A^{c-n} =$
$a_n A^c + a_{n-1}A^{c-1} + a_{n-2}A^{c-2} + a_{n-3}A^{c-3} \ldots a_{n-c} +$
$a_{n-c-1}A^{-1} + a_{n-c-2}A^{-2} \ldots a_{n-(c+r)}A^{-(n-c)}$.
En $a_{n-(c+r)}A^{-(n-c)}$ er sama sem $a_{n-c-r}A^{-n+c} =$
$a_{n-r-c}A^{-r} = a_{n-n}A^{-r} = a_0 A^{-r}$.

172. Í næst undanganganda tölulið (171) gjörðum vèr ráð fyrir $n > r$; en nú viljum vèr setja, að sè $n = r$; þá er ekki þörf á að hafa báða þessa bókstafi, því sá eini gildir fyrir báða. Vèr notum því einungis n. Brotið verður þá:

$$\frac{p}{q} = \frac{a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + a_{n-3}A^{n-3} \ldots\ldots}{A^n}$$
$$= a_n + a_{n-1}A^{-1} + a_{n-2}A^{-2} + a_{n-3}A^{-3} \ldots a_0 A^{-n}$$

Þá verður a_n einingastafur kvótans, en alt, sem á eptir kemur, er brot, og seinasti liður kvótans verður $a_0 A^{-n}$. Eptir venjulegri skript stendur þetta svo:

$$\frac{p}{q} = \frac{a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} a \ldots a_0}{A^n} = a_n, a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \ldots a_0.$$

Sè deilandi hinn sami sem í næstundanganganda tölulið, en *divisor* $A^7 = 10^7 = 10000000$, þá er:

$$\frac{p}{q} = \frac{64598367}{10000000} = 6{,}4598367;$$

og ber þessu saman við (165) og reglan fyrir deilingu með tugaveldi (A-töluveldi) verður sú, að afskera með kommunni eins marga *decimala* sem núll eru í *divisor*. Verður þá, þegar jafnmargir stafir eru í *divisor* og *dividendus*, einungis 1 stafur heill eða fyrir framan kommuna.

173. Í tölulið (171) var gjört ráð fyrir $n > r$, og í (172) $n = r$. Nú er þá í þriðja lagi að gjöra ráð fyrir $n < r$; þá verður

$$\frac{p}{q} = \frac{a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + a_{n-3}A^{n-3} \ldots a_0}{A^r}$$
$$= a_n A^{n-r} + a_{n-1}A^{n-r-1} + a_{n-2}A^{n-r-2} + a_{n-3}A^{n-r-3} \ldots a_0 A^{-r}.$$

En þar $n < r$, þá er *exponentinn* $n - r$ *negatífur*, verður

því $r-n$ *positif* stærð, og til að tákna, að *exponentinn* sè *negatífur*, þá má skrifa $-(r-n)$. Verður svo kvótinn:

$$a_nA^{-(r-n)} + a_{n-1}A^{-(r-n)-1} + a_{n-2}A^{-(r-n)-2} + a_{n-3}A^{-(r-n)-3} \dots a_{n-n}A^{-(r-n)-n}$$
$$= a_nA^{-(r-n)} + a_{n-1}A^{-(r-n)-1} + a_{n-2}A^{-(r-n)-2} + a_{n-3}A^{-(r-n)-3} \dots a_0A^{-r},$$

því $-(r-n)-n = -r+n-n = -r$.

Þar eð *exponentinn* í fyrsta lið þessa kvóta er $= -(r-n)$ og $r > n$, þá er hann *negatífur*, og a_n er þá *decimal*. Þá er að skoða, hvað langt hann sè frá einingastaf kvótans, þar sem *exponentinn* við A er $= 0$; það eru einmitt $r-n$ sæti, eða a_n er þá hinn $(r-n)$ti stafur frá einingastafnum eða frá kommunni. Milli kommunnar og stafsins a_n verða því að standa $r-n-1$ núll, svo að a_n verði hinn $(r-n)$ti *decimal* frá kommunni.

Vilji eg vita, hvaða *index* mundi verða við einingastaf kvótans, þá legg eg $r-n$ við n, og summan verður $n+(r-n) = n+r-n = r$. Það þýðir, að einingastafur kvótans sè a_r eða hinn $r$ti frá enda tölunnar hægra megin. Þetta kemur samanvið (172), þar sem jafnmargir stafir eru í deilanda sem deili. Því vantaði hèr ekki tölustafi framan við deilanda, þá stæði 1 í *divisor* undir fyrsta staf deilanda, en núllin í *divisor* stæði undir hinum öllum, eins og í dæminu (172).

Eptir venjulegri skript stendur reikningurinn svo:

$$\frac{p}{q} = \frac{a_na_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_0}{A^r} = 0{,}00\cdots a_na_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_0$$

Sè deilandi hinn sami sem í næst undangangandi töluliðum, en $r = 10$, svo að $A^r = 10^{10} = 10000000000$, þá væri

$$\frac{p}{q} = 6\,.\,10^{7-10} + 4\,.\,10^{6-10} + 5\,.\,10^{5-10} + 9\,.\,10^{4-10} + 8\,.\,10^{3-10} + 3\,.\,10^{2-10} + 6\,.\,10^{1-10} + 7\,.\,10^{0-10}$$
$$= 6\,.\,10^{-(10-7)} + 4\,.\,10^{-(10-7)-1} + 5\,.\,10^{-(10-7)-2} + 9\,.\,10^{-(10-7)-3} + 8\,.\,10^{-(10-7)-4} + 3\,.\,10^{-(10-7)-5} + 6\,.\,10^{-(10-7)-6} + 7\,.\,10^{-(10-7)-7}$$

$= 6 \,.\, 10^{-3} + 4 \,.\, 10^{-3-1} + 5 \,.\, 10^{-3-2} + 9 \,.\, 10^{-3-3}$
$+ 8 \,.\, 10^{-3-4} + 3 \,.\, 10^{-3-5} + 6 \,.\, 10^{-3-6} + 7 \,.\, 10^{-3-7}$
$= 6 \,.\, 10^{-3} + 4 \,.\, 10^{-4} + 5 \,.\, 10^{-5} + 9 \,.\, 10^{-6} + 8 \,.\, 10^{-7}$
$+ 3 \,.\, 10^{-8} + 6 \,.\, 10^{-9} + 7 \,.\, 10^{-10}$
$= \frac{7}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \frac{8}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{6}{10^9} + \frac{7}{10^{-10}}$
$= 0{,}006 + 0{,}0004 + 0{,}00005 + 0{,}000009 + 0{,}0000008 +$
$0{,}00000003 + 0{,}000000006 + 0{,}0000000007$
$= \frac{64598367}{10000000000} = 0{,}0064598367.$

Þegar skrifa skal tugaveldi í nefnara stað undir tölu, er hægast að skrifa 1ta núllið undir a_0 í tölunni, og svo hvert af öðru, unz $r$ta núllið, sem í tugabroti lendir við kommuna, kemur undir a_{r-1} í tölunni, nái hún svo langt. Lendir þá a_r í tugaveldinu, sem er 1 fyrir framan kommuna í tugabroti. Þetta kemur upp á sama og þó byrjuð væri talningin á a_1, og þá enduð á stafnum fyrir framan kommuna, ef í tugabroti er, rètt eins og *indexarnir* eru taldir.

174. Margföldun tugabrots (A-tölubrots) með tugaveldi (A-töluveldi) getur með bókstöfum táknazt þannig:

$$\frac{a}{A^n} \,.\, A^m = \frac{a}{A^{n-m}},$$

því $\frac{a}{A^n} \,.\, A^m = \frac{aA^m}{A^n}$ eptir (95); þetta má stytta með A^m eptir (85); kemur $\frac{a}{A^{n-m}}$, sem segir, að A-tölubrot margfaldist með A-töluveldi með því að flytja kommuna eða einingastafinn um svo mörg sæti til hægri, sem veldis*exponentinn* m ákveður. (Þessi *theoria* eða skoðun er eptir *Adolph Steen*, hin fyrri (165) eptir *Ursin* o. fl.).

Dæmi. Brotið í (137), $0{,}0064598367 = \frac{64598367}{10000000000} = \frac{a}{A^{10}}$ margfaldast með 10^6 eða 1000000 með því að flytja kommuna um $m = 6$ reiti til hægri; kemur $\frac{a}{A^{10-6}} = \frac{a}{A^4} = 6459{,}8367$ $= \frac{64598367}{10000} = 6459\frac{8367}{10000}$, samber (165). $\frac{a}{A^n}$ skrifast í al-

mennum brotum, með því að skrifa fyrst töluna $a = 64598367$ og þar undir $n = 10$ núll, og 1 fyrir framan, en í tugabrotum með því, að skrifa töluna a, telja aptan af henni $n = 10$ stafi, og bæta við núllum, ef þarf, og setja svo kommuna. Með sama hætti skrifast $\frac{a}{A^{n-m}} = \frac{a}{A^{10-6}} = \frac{a}{A^4}$ með því að setja kommunu fyrir framan $n - m$, hèr $10 - 6 = 4$ stafi, samber (173).

175. Deiling A-tölubrots með A-töluveldi táknast þannig með bókstöfum:

$$\frac{a}{A^n} : A^m = \frac{a}{A^{n+m}}.$$

Þetta finst eptir (98) með því að margfalda nefnarann A^n með *divisor* A^m; kemur A^{n+m}. Þessi líking segir, að A-tölubrot *dividerist* með A-töluveldi A^m með því að flytja kommuna eða einingastafinn um svo mörg sæti til vinstri, sem veldis*exponentinn* m ákveður.

Þessi *formula* getur verið innibundin í hinni fyrri í tölulið (174) með því að gjöra m þar *negatíft*, því að deila með A^m er sama sem að margfalda með $\frac{1}{A^m} = A^{-m}$.

176. Samlagning A-tölubrota getur álitizt framfara eptir *formulunni*

$$\frac{a}{A^m} + \frac{b}{A^n} = \frac{a + b \,.\, A^{m-n}}{A^m}$$

þar sem $m > n$. Brotin gjörast samnefnd. *General*nefnarinn getur verið A^m, því A^n gengur upp í A^m, kvótinn verður A^{m-n}. Brotið $\frac{a}{A^m}$ má þá halda sèr, en hitt brotið $\frac{b}{A^n}$ verður að margfaldast í teljara og nefnara með A^{m-n}, sem er brotlengjarinn (92). bA^{m-n} verður þá hinn nýi teljari brotsins $\frac{b}{A^n}$.

Dæmi:

	$\underbrace{A^3}_{1000}$		
$0{,}645 = \frac{645}{1000}$	1	645	$\frac{645}{1000}$
$0{,}7 \;\;= \frac{7}{10}$	A^2	700	$\frac{700}{1000}$
1,345			$\frac{1345}{1000}.$

Hèr er $\frac{b}{A^n} = \frac{7}{10} = \frac{7}{10^1}$. *General*nefnarinn $A^m = 1000$.
$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n} = A^{3-1} = A^2 = 100$. Með þessu skal margfalda $\frac{7}{10}$ í teljara og nefnara. Það gjörist með því að skrifa tvö núll aptan við 0,7, svo verði 0,700. Samber (165) og (166). *Formulan* upphaflega í þessum tölulið (176) segir því: Bæta skal núllum aptan við það A-tölubrot, sem hefir færri *decimalana* (nefnilega $\frac{b}{A^n}$), unz bæði hafa jafnmarga, og síðan *adderast* teljararnir. Í frádragning gildir sama regla. Þrátt fyrir þessa skoðun er það óþarfi að gjöra tugabrotin samnefnd, eða fylla þau með núllum, því það er eins hægt að taka þau í sundur og leggja svo saman hverja stètt fyrir sig, eins og gjört var (165). Þannig er í dæminu í þessum tölulið (176):

$$
\begin{array}{l}
0{,}645 = \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} \\
0{,}7 \qquad \frac{7}{10} \\
\hline
1{,}345 = \frac{13}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} \\
\qquad = 1 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} \\
\qquad = 1{,}345.
\end{array}
$$

Þó er það ekki meiningin, að skrifa skuli alt þetta, heldur að eins hugsa sèr það, en skrifa einungis tugabrotin.

177. *Formulan* fyrir A-tölubrota margföldun er þessi:

$$\frac{a}{A^m} \cdot \frac{b}{A^n} = \frac{ab}{A^{m+n}}$$

og þarf hún enga útskýringu aðra en komin er áður í tölulið (168).

178. Reglan fyrir deilingu A-tölubrota liggur í *formulunni*:

$$\frac{a}{A^m} : \frac{b}{A^n} = \frac{\frac{a}{b}}{A^{m-n}}$$

og má með orðum úttalast þannig: Tölunum skal deila fyrst án tillits til kommunnar, og afmarka í kvótanum svo marga A-tölu-

brotsstaß, sem mismunurinn milli deilanda og deilis *decimala*-fjölda ákveður. Verði mismunurinn $m - n$ *negatífur*, þá skal bæta núllum við kvótann.

Sönnun:

$$\frac{a}{A^m} : \frac{b}{A^n} = \frac{a}{A^m}\frac{A^n}{b} \text{ eptir (98, 3).}$$

$$\frac{a}{A^m}\frac{A^n}{b} = \frac{ab^{-1}}{A^m A^{-n}} = \frac{\frac{a}{b}}{A^{m-n}},$$

þá

$$\frac{a}{A^m} : \frac{b}{A^n} = \frac{\frac{a}{b}}{A^{m-n}}.$$

Bókstafi má í bókstafabrotum flytja úr nefnara upp í teljara, og úr teljara ofan í nefnara, ef umbreytt er merki *exponentsins* í hið gagnstæða. Þannig mátti hèr í brotinu $\frac{aA^n}{A^m b}$ flytja A^n ofan í nefnarann með því að skrifa A^{-n}, og b má flytja upp í teljarann með því að skrifa b^{-1}. Þetta er líkt brotstyttingu, eða er deiling teljara og nefnara með sömu stærð, því

$$\frac{aA^n : A^n}{A^m b : A^n} = \frac{a}{A^m A^{-n} b} = \frac{a}{A^{m-n} b}$$

og

$$\frac{a : b}{A^{m-n} b : b} = \frac{ab^{0-1}}{A^{m-n}} = \frac{ab^{-1}}{A^{m-n}}.$$

Í deilingar*formulunni* fyrst í þessum töluliö er gjört ráð fyrir, að kvótinn $\frac{a}{b}$ verði heil tala, en það ber sjaldnast við. Það verður þá fyrst að ákvarða hann í tugabrotum og kommuna í honum, eptir sömu *formulu*, og síðan flytja hana til vinstri um $m - n$ reiti, eins og *formulan* segir.

Dæmi: $0{,}046 : 0{,}00762089;$

þetta er $\frac{46}{10^3} : \frac{762089}{10^8}.$

Fyrst verður að deila

$$46{,}000000000000 : 762089$$

og er það

$$\frac{46000000000000}{10^{12}} : \frac{762089}{10^0}.$$

$$
\begin{array}{l}
762089)\ 46000000000000\ (60360404 \\
\quad\underline{4572534} \\
\qquad 2746600 \\
\qquad \underline{2286267} \\
\qquad\ \ 4603330 \\
\qquad\ \ \underline{4572534} \\
\qquad\quad 3079600 \\
\qquad\quad \underline{3048356} \\
\qquad\qquad 3124400 \\
\qquad\qquad \underline{3048356} \\
\qquad\qquad\ \ 76044.
\end{array}
$$

Aptan af þessum kvóta 60360404 verður fyrst að skera 12 — 0 stafi, kemur 0,000060360404; síðan verður að færa kommuna um 3 — 8 reiti til vinstri, það er um 5 reiti til hægri; kemur 6,0360404. (Skoðanirnar (174) — (178) eru hèr um bil eptir *Adolph Steen*).

179. Að gjöra alment brot að tugabroti (A-tölubroti).

Þetta verkefni er raunar sama sem að deila teljara með nefnara, og láta kvótann verða tugabrot, og höfum vèr viðhaft þá aðferð (169) tvisvar, þar sem vèr deildum $\frac{5737}{458750}$ og $\frac{1250000}{4070131}$. En brot er sama sem kunngjörð deiling (79), hvort sem það er alment brot eða tugabrot. En þó nú þessu sè svona varið, þá þarf betur að hugleiða breytingu almenns brots í tugabrot.

Vèr gjörum nú ráð fyrir, að hið gefna almenna brot sè $\frac{p}{q}$, og að það sè fullstytt, því annars gildir ekki það, sem nú hèr eptir skal greina. Framvegis sè A kerfisumferðin í A-tölukerfi, sem er 10 í tugakerfi, og r *exponentinn* A-töluveldisins eða tugaveldisins, og N skal vera teljari A-tölubrotsins (tugabrotsins). Þá á að verða

$$\frac{p}{q} = \frac{N}{A^r};$$

þá er:

$$\frac{pA^r}{q} = N.$$

Hèr geta þá þrjú tilfelli fyrir komið, nefnilega:

1. Frumgjörendurnir í nefnara almenna brotsins q sè sömu sem í A.

2. Að þeir sè aðrir en í A.
3. Að þeir sè bæði sömu og líka aðrir en í A.

180. Ef frumgjörendurnir í q eru hinir sömu sem í A, þá verður N heil tala, og tugabrotið fullnákvæmt og endanlegt, því í

$$\frac{pA^r}{q} = N$$

gengur q upp í A^r, ef r er tekið nógu stórt. Setjum $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots$, þá verður $A^r = p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} p_3^{r\alpha_3} \cdots$, en r verður að takazt svo stórt, að *exponentarnir* $r\alpha_1$ $r\alpha_2$ $r\alpha_3 \cdots$ verði annaðhvort jafnir eða stærri en *exponentar* sömu frumtalna í q, þá geta *exponentarnir* í *divisor* dregizt frá *exponentunum* í *dividendus* (63, 4), án þess að mismunurinn verði *negatífur*. *Decimalarnir* verða þá svo margir, sem hinn stærri eða stærsti *exponent* frumtalnanna í q. Samber (145), hvað tugabrotin áhrærir, en (160, 5), hvað öll A-tölubrot snertir. Í *praxis* (framkvæmdinni) verður þó drjúgust sú aðferð, sem höfð var (169), að smábæta núllum aptan við *dividendus*, sem er teljarinn, eptir sem á þarf að halda, og setja kommuna fyrir framan eins marga staði, sem núllum var viðbætt.

Dæmi: $\frac{3476}{15625}$

```
15625) 3476,0 (222464
       31250
        35100
        31250
         38500
         31250
          72500
          62500
          100000
           93750
            62500
            62500.
```

Hèr er 6 núllum viðbætt; þess vegna eru 6 *decimalar*, og brotið $= 0{,}222464$. Nú er $15625 = 5^6 = 2^0 . 5^6$ og stærri *exponentinn* er 6, og þess vegna eiga einnig *decimalarnir* að vera 6.

2. dæmi: $\frac{17}{500}$. Hèr má skera núllin aptan af nefnaranum í bráð; þó verður að telja þau með, þegar komman skal setjast:

$$5|00)\ \underline{17,0}$$
$$3,4.$$

Hèr varð einu núlli við að bæta, svo upp gengi deilingin með 5, og varð kvótinn þá 3,4. En svo verður að minnast núllanna, sem afskorin voru, og þeirra vegna færa kommuna um tvo reiti til vinstri, eins og deila ætti með 100 eptir (175); verður brotið 0,034. Hèr var líka deilirinn 500, eða nefnari almenna brotsins $500 = 2^2 \cdot 5^3$; þar er stærri *exponentinn* 3 og þess vegna eiga hèr að vera 3 tugabrotstafir.

Skoða má þetta verk nokkuð á annan veg, að gjöra alment brot að tugabroti. Það má skoða það sem nokkurs konar brotlengingu (84), þannig að hinn nýi nefnari verði tugaveldi. En brotlengjarinn (92) verður að finnast með því að deila tugaveldi með nefnara almenna brotsins. Þetta lukkast ætíð algjörlega, þegar frumtölurnar í nefnara almenna brotsins $\frac{p}{q}$ eru ekki aðrar en 2 og 5, því þá ganga þær ætíð upp í einhverju tugaveldi. Í fyrra dæminu í þessum tölulið var nefnarinn $15625 = 5^6$. Þetta gengur upp í $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ og kvótinn er 2^6. Brotlengjarinn er þá $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 8 = 64$. Þá er

$$\frac{3476 \cdot 64}{15625 \cdot 64} = \frac{222464}{1000000} = 0,222464.$$

181. Ef frumgjörendurnir í q eru aðrir en í A, þá gengur aldrei upp deilingin $\frac{pA^r}{q}$, og tugabrotið verður ekki nákvæmt, heldur með nálgun nálægt. Að aldrei gangi upp, er auðsætt af (134), þar frumgjörendurnir eru ýmislegir í p og q, þar þessar tölur eru frumtölur sín á milli, eða brotið $\frac{p}{q}$ fullstytt. Sömuleiðis eru q og A^r ósammældar, eins og gefið er, og sama verður hvað mörgum núllum sem bætt er við *dividendus*, því aldrei koma neinir nýir *factorar* fyrir það, heldur alt af hinir sömu, nefnilega *factorarnir* í A, sem í tugabrotunum eru 2 og 5. Samt verður tugabrotið því nær hinu rètta, sem *decimalar* takast fleiri í kvótann, því skakkinn verður minni en 1 eining, sem seinasti *decimal* eða

A-tölubrotsstafur telur, nefnilega $< \frac{1}{A^n}$ ef stafurinn er hinn n^{ti} A-tölubrotsstafur.

Dæmi: $\frac{4}{21}$.

$$
\begin{array}{l}
21)\ 4{,}0\ (190476190476 \\
\underline{21} \\
\ 190 \\
\ \underline{189} \\
\quad 100 \\
\quad\ \underline{84} \\
\quad 160 \\
\quad \underline{147} \\
\quad\ 130 \\
\quad\ \underline{126} \\
\qquad 40 \\
\qquad \underline{21} \\
\qquad 190 \\
\qquad \underline{189} \\
\qquad\ 100 \\
\qquad\ \ \underline{84} \\
\qquad\ 160 \\
\qquad\ \underline{147} \\
\qquad\ \ 130 \\
\qquad\ \ \underline{126} \\
\qquad\qquad 4.
\end{array}
$$

Eins og áður er sagt, sèst hèr, að aldrei gengur upp, því alt af koma leifar, sem komið hafa áður, og þegar niður til þeirra er fært núll, kemur sami kvótastafur, sem komið hefir áður. Þannig koma aptur og aptur sömu sèrdeilendur (60), og sömu kvótastafir í röð hinir sömu sem áður, og mynda þannig umferðir (*periodos*), og brotin, sem þannig eru, kallast *periodisk* tugabrot (umferðarbrot).

Þetta brot $\frac{4}{21}$ gefur þá tugabrot

0,190476190476190476190476190476.......

Til að tákna þessi umferðarbrot stuttlega, skrifa sumir umferðina ekki nema einu sinni, og þá stryk upp yfir henni, svo sem

$0,\overline{190476}$.

Og er þetta 6-stöfuð umferð. Frumtölur nefnarans í brotinu $\frac{4}{21}$ eru 3 og 7 og teljarans 2 og 2. Þegar nú þetta brot margfaldast með $A = 10 = 2 . 5$, í hvaða veldi sem er, þá verður það:

$$\frac{(2 . 2)(2 . 5)(2 . 5)(2 . 5)\cdots}{3 . 7}$$

og er það auðsjáanlegt eptir (134), að *factorarnir* 3 og 7 ganga aldrei upp í *dividendus*, hvað opt sem þar bætast við *factorarnir* 2 og 5, með því að skrifa núll aptan við hann.

Aldrei getur *periodus* orðið stafafleiri en *divisor* — 1 hefir í sèr einingar. Því þegar deilt er með *divisor*, þá er ætíð afgangurinn látinn vera minni en hann. Þar geta því aldrei framkomið fleiri misstórir afgangar heldur en $=$ *divisor* — 1. Setjum til dæmis, að *divisor* væri 7, þá geta ekki aðrir afgangar orðið en 1, 2, 3, 4, 5, 6; því ef 7 yrði afgangur, þá væri á þeim stað *divisor* hafður of fáum sinnum í sèrdeilanda. Þar nú ekki veltur á öðrum tölum misstórum en þessum 6, þá getur ekki lengra millibil orðið, unz einn og hinn sami afgangur aptur kemur, en í mesta lagi 6 deilingar. Dæmi, sem sýnir afgangana, þá deilt er með 7:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3\,2\,6\,4\,5\,1\,3 \\ 7)\ \underline{10000000} \\ 1428571. \end{array}$$

Hèr eru afgangarnir skrifaðir fyrir ofan eins og í (59). Eptir 6 deilingar kemur hèr aptur afgangurinn 3.

Bæði í þessum *periodisku* tugabrotum og öðrum, sem hafa marga *decimala*, má nota að eins svo marga *decimala* sem vill, en sleppa hinum, sem á eptir koma, alt eptir því sem reikningurinn þarf að vera nákvæmur. Það er hægt við hvern *decimala*fjöldann að sjá, hvað stór skakkinn muni vera, er rís af hinum sleptu *decimölum*, t. d. ef teknir eru 5 *decimalar* ($n = 5$), en hinum slept, sem á eptir koma

0,00000,

þá skakkar ekki um 1 hundraðþúsundasta part úr einingunni $\left(\frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^5}\right)$, heldur um m milliónustu parta úr henni $\left(\frac{m}{10^{n+1}} = \frac{m}{10^6}\right)$. Það getur þó orðið, ef hinn fyrsti slepti stafur er stór, svo sem 6, 7, 8, 9, t. d. skakkinn verði 9 af þessum milliónustu pörtum $\frac{9}{10^6}$, og þá er það nærri 1 hundraðþúsundasti partur

$\frac{1}{10^5}$, sem skakkar. Þetta fyrirbyggja menn með því að auka seinasta stafinn, sem haldinn verður, um 1, ef menn vita, að hinn fyrsti burtkastaði stafur er 5 eða þar yfir, t. d. vilji eg í brotinu

$$\tfrac{4}{21} = 0{,}19047619\cdots$$

einungis nota 4 *decimala* þess

$$0{,}1904,$$

en sè, að næsti stafur er stór, nefnilega 7, þá eyk eg seinasta stafinn, sem eg tek, nefnilega 4, um 1, og læt hann vera 5, þannig:

$$0{,}1905,$$

því þá er skakkinn minni, en ef eg læt hann vera 4, því

$$0{,}1904 = 0{,}19040$$
$$0{,}19047 = 0{,}19047$$
$$0{,}1905 = 0{,}19050.$$

Hèr sjáum vèr, að miðbrotið er hið rèttasta, efsta brotið vantar 7 hundraðþúsundustu parta, en hið neðsta er of stórt um 3 hundraðþúsundustu parta. Þegar eg vil komast sem næst 47, þá er mèr betra að hafa 50, heldur en 40. Með þessu móti að auka seinasta stafinn, þegar hinn fyrsti slepti er stór, ávinna menn það, að skakkinn verður aldrei meiri en $\frac{1}{2}$ eining þess stafs, sem haldinn er, ɔ: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Þegar eg reikna með 4 tugabrotsstöfum, þá reikna eg í tíuþúsundustu pörtum, og þegar eg læt þetta brot vera 0,1905, verður skakkinn minni en $\frac{1}{2}$ tíuþúsundasti partur. Væri nú hinn fyrsti slepti stafur 5, þá gildir einu, hvort eg eyk seinasta haldna stafinn eða ekki, því 5 er þá á takmörkunum eða í miðjunni. Þó ef einhverjir aðrir stafir en núll koma eptir 5, þá er betra að auka haldna stafinn, því þá er að varast að sleppa meira en helmingi stafs einingarinnar.

182. Nú viljum vèr hafa aðra aðferð til að gjöra þau almennu brot að tugabroti, er hafa nefnarann ósàmmældan 10. Vèr viljum samt hafa brotlengingaraðferðina og deila $(10^y - 1) = 999\cdots$ með nefnaranum, samber (160, 6) og (159). Hèr er $q = 3 \cdot 7 = 21$, sem á að ganga upp í $(10^y - 1) = 999\cdots$, og má eins taka 9 hvað eptir annað, eins og 0.

$$
\begin{array}{l}
21)\ 99\ (4761904 \\
\underline{84} \\
\ \ 159 \\
\ \ \underline{147} \\
\ \ \ \ 129 \\
\ \ \ \ \underline{126} \\
\ \ \ \ \ \ 39 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{21} \\
\ \ \ \ \ \ 189 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{189} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 099 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{84}
\end{array}
$$

Þegar komnir voru kvótastafirnir 47619, þá gekk hèr upp, svo 47619 er brotlengjarinn; þess vegna

$$\frac{4\ .\ 47619}{21\ .\ 47619} = \frac{190476}{999999}.$$

Teljari þessa nýja brots er þá *periodus* tugabrotsins.

183. Að þannig fenginn teljari sè *periodus* tugabrotsins, sáum vèr í næstundanganganda tölulið einungis af því, að honum ber saman við þá *periodus*, sem tugabrotið í (181) hefir. En nú viljum vèr sanna það með öðru móti.

Vèr rekjum til þess brotið $\frac{1}{A^r - 1}$ í sundur í *series* með deilingu, þannig:

$$
\begin{array}{l}
A^r - 1)\ 1\ \left(\frac{1}{A^r} + \frac{1}{A^{2r}} + \frac{1}{A^{3r}} \cdots\right. \\
\qquad\qquad 1 - \frac{1}{A^r} \\
\qquad\qquad \underline{-\quad +\qquad} \\
\qquad\qquad \frac{1}{A^r} \\
\qquad\qquad \frac{1}{A^r} - \frac{1}{A^{2r}} \\
\qquad\qquad \underline{-\qquad +\qquad} \\
\qquad\qquad \frac{1}{A^{2r}} \\
\qquad\qquad \frac{1}{A^{2r}} - \frac{1}{A^{3r}} \\
\qquad\qquad \underline{-\qquad +\qquad} \\
\qquad\qquad \frac{1}{A^{3r}}.
\end{array}
$$

þetta verður óendanleg *series*

$$\frac{1}{A^r - 1} = \frac{1}{A^r} + \frac{1}{A^{2r}} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^4} \cdots\cdots$$

Látum nú A^r vera tugaveldi með eins mörgum núllum, sem 9 eru margir skrifaðir í nefnara lengda brotsins $\frac{190476}{999999}$; þess vegna $= 1000000$; þá verður stærðin vinstra megin við jafnaðarmerkið

$$\frac{1}{1000000 - 1} = \frac{1}{10^6 - 1}$$

og þessi *series*, þar $r = 6$,

$$\frac{1}{10^6 - 1} = \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \frac{1}{10^{18}} + \cdots,$$

það er

$$\frac{1}{999999} = \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \frac{1}{10^{18}} + \cdots$$

Skrifum vèr þessa *series* í tugabrotslíki, kemur:

$$\frac{1}{999999} = 0{,}000001000001000001 \cdots,$$

er sèst á samlagningu tugabrota,

því $\frac{1}{10^6} = 0{,}000001$

$$\frac{1}{10^{12}} = 0{,}000000000001$$

$$\frac{1}{10^{18}} = 0{,}000000000000000001 \text{ o. s. frv.}$$

Nú vantar ekki annað til að fullgjöra brotið vinstra megin, en að margfalda báðum megin við jafnaðarmerkið með lengda brots teljaranum 190,476; kemur

$$\frac{190476}{999999} = 0{,}190476190476190476190476190476 \cdots$$

og er þá *periodiska* tugabrotið komið með sinni *periodus* 190476.

Í (182) fanst $\frac{4}{21} = \frac{190476}{999999}$, en í (183) er fundið $\frac{190476}{999999} = 0{,}\overline{190476}$; þess vegna er $\frac{4}{21} = 0{,}\overline{190476}$.

Þannig má snúa öllum brotum, sem hafa nefnara ósammældan með 10, í *periodiskt* tugabrot, einungis eptir (182), án þess að skipta sèr nokkurn hlut af (183), því þegar teljari lengda brotsins er fenginn, þá er alt *periodiska* tugabrotið fengið. Hinn (183) töluliður er einungis til að sanna, að teljari lengda brotsins 1 sè *periodus* tugabrotsins.

184. Nú er eptir að hugleiða hið þriðja tilfelli, sem talið var í (179), nefnilega, að nokkrir frumgjörendur í q gangi upp í A, en aðrir ekki. Þá gengur deilingin $\frac{pA^r}{q}$ aldrei upp, og tugabrotið verður óendanlegt, og að sönnu *periodiskt*, en *periodurnar* byrja ekki strax við kommuna, heldur koma nokkrir tölustafir áður, og það eins margir, sem stærri *exponentinn* við 2 og 5 í nefnaranum q hefir í sèr einingar eptir (180). Þessi tugabrot kallast þá ekki lengur *periodisk*, heldur hálf-*periodisk* (á dönsku *ufuldkommen eller blandet priodiske*). Þessi hálf-*periodisku* eða hálf-umferðabrot má eins finna og hin fyrri með því að deila teljara með nefnara.

Dæmi: $\frac{8}{75} = \frac{8}{3\,.\,5^2}$.

Þar 3 er ekki *factor* í 10, þá gjörir sá *factor* nefnarans, að aldrei gengur upp, og þar *exponentinn* við 5 er 2, þá verða 2 stafir, sem koma eptir kommuna, áður en *periodurnar* byrja.

75) 8,0 (0,10666......
7 5
500
450
500
450
500
450
50.

Þettá tugabrot verður 0,1066666 ···· og *periodan* er einstöfuð, nefnilega 6.

2. Dæmi: $\frac{19}{296} = \frac{19}{2^3\,.\,37}$.

296) 19,00) 0,064189......
1776
1240
1184
560
296
2640
2368
2720
2664
56.

Hèr er komin sama leif $= 56$, sem komið hefir áður, og er það merki til, að *periodurnar* byrja, svo brotið verður hálf*periodiskt* $= 0{,}064\overline{189}$. *Periodurnar* eru 3stafaðar og undangangandi stafirnir eru þrír. Þetta gátum vèr sèð fyrirfram, því, að *periodurnar* eru þrístafaðar, leiðir af því, að 37 gengur upp í 999, eða er g_3 (146), en að undangangandi stafirnir eru þrír, af *exponentinum* við 2, eptir (180).

185. Hafa má brotlengingaraðferðina í þessu þriðja tilfelli, eins og í hinu öðru; en hún er miklu lengri en þessi, sem vèr höfðum í (184). Nefnararnir í þessum brotum ganga nú ekki upp í $(10^y - 1)$, heldur upp í tölu $(10^y - 1)10^x$, sem skrifast með nokkrum 9999 .... og núllum þar á eptir. Núllin eru x, eða eins mörg og stærri vísirinn við 2 og 5, eins og segir í (160, 7), en hitt verður drjúgast með tilraunum að finna y, eða upp í hvað mörgum 9 *product* hinna annara frumtalna nefnarans gengur. Þar aptan við verður að skrifa þau x núll og deila þeirri tölu $(10^y - 1)10^x$ með forna nefnaránum q. Þá er fenginn brotlengjarinn $= b$, og margfaldast með honum teljarinn; kemur pb. Hinn nýi teljari pb deilist síðan með $(10^y - 1) = 99\cdots$; kemur blandin tala B eða brot. Teljarinn í þeirri blöndnu tölu eða broti verður *periodus*, og verður að fylla hana með núllum, ef hún er ekki y tölustafir eða eins stafamörg, sem nefnarinn 99..... Má þá skrifa heilu töluna, ef nokkur var, í B fyrir framan *periodurnar* með kommu á milli, og loksins færa þá kommu um x reiti, eða svo marga reiti til vinstri, sem núllin voru mörg aptan við 99 ....; er þá hálf*periodiska* tugabrotið fengið. Tökum fyrra dæmið í (184), nefnilega $\frac{8}{75} = \frac{8}{3 \,.\, 5^2}$; þá vitum vèr, að 3 ganga upp í einum 9, er þá $y = 1$, og *exponentinn* við 5 boðar tvö núll aptan við þá 9; er þá $x = 2$. Nefnarinn verður þá 900. Þá vitum vèr, að gamli nefnarinn 75 gengur upp í 900 eptir *formulunni* $(10^y - 1)\,10^x$. Eg deili þá $900 : 75$, og fæ $12 = b$, sem er brotlengjarinn, þá

$$\frac{pb}{qb} = \frac{8 \,.\, 12}{75 \,.\, 12} = \frac{96}{900} = \frac{96}{9 \,.\, 100}.$$

Þessa 100 tek eg frá um stund, en deili

$$\frac{96}{9} = 10\frac{6}{9} = B.$$

þessir 6 í broti kvótans er *periodus*, því *series* (183) gefur

$$\frac{1}{10^1-1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$$

eða $\frac{1}{9} = 0{,}11111\cdots$

og þegar það er margfaldað með 6, kemur

$$\frac{6}{9} = 0{,}666666\cdots$$

og $10\frac{6}{9} = 10{,}6666\cdots = \frac{96}{9} = B.$

En þar 100 var undandregið úr nefnaranum, verður nú aptur að deila með 100 (58*, 2), með því að færa kommuna um 2 reiti til vinstri (175); kemur þá

$$\tfrac{8}{75} = 0{,}106666666$$

eins og í (184).

2. Dæmi: $\frac{5}{104} = \frac{5}{8.13} = \frac{5}{2^3.13}.$

2 er *factor* í 10, og *exponentinn* við 2 er hèr 3; þá er $x = 3$ í stærðinni $(10^y - 1)10^x$. En y verður að finnast með þessari deilingu:

$$13)\ \overset{8}{9}\,\overset{11}{9}\,9.\overset{3}{9}\,\overset{3}{9}\,9 \quad \text{—} \quad 7\,6\,9\,2\,3.$$

Hèr gengur ekki fyrri upp, en búið er 6 sinnum að taka 9; y er því $= 6$. *Formulan* fyrir stærðinni, sem nefnarinn 104 gengur upp í, verður þá $(10^6 - 1)10^3$, það er 999999000. Þá deili eg því með 104:

104) 999999000 (9615375
639
159
559
390
780
520
0.

Hèr eru allir frádragarnir undanfeldir til að spara rúmið. Brotlengjarinn b er þá $= 9615375$. Með honum margfaldast teljarinn 5; kemur 48076875, sem er nýi teljarinn, svo hið nýja brot verður:

$$\frac{48076875}{999999000.}$$

Hèr undanfelli eg núllin um stund, en deili teljaranum með 999999, sem er $(10^7 — 1)$.

$$\begin{array}{l} 999999)\ 48076875\ (48\frac{76923}{999999} = B \\ \underline{3999996} \\ 8076915 \\ \underline{7999992} \\ 76923. \end{array}$$

Teljarinn í þessari blöndnu tölu er *periodus* tugabrotsins eptir *series* í (183), en verður að setja eitt 0 framan við 76923, svo verði 076923, því $y = 6$ heimtar 6 stafi í *periodus*. Framan við þetta á nú að setja heilu töluna úr B; kemur

$$B = 48{,}076923076923076923.$$

Loksins færist komman um 3 reiti til vinstri vegna hinna undanfeldu þriggja núlla í deilingunni; kemur þá

$$\frac{5}{104} = 0{,}0480769230769230769230769 23 \cdots\cdots\cdots$$

3. dæmi: Nú tökum vèr hið annað dæmi (184), nl. $\frac{19}{296} = \frac{19}{2^3.37}$.

Þar 2 er *factor* í 10, og *exponentinn* er 3, þá er $x = 3$ í stærðinni $(10^y - 1)\ 10^x$; (160, 7). En y verður að finnast með deilingu.

$$\begin{array}{l} 37)\ 999\ (27 \\ \underline{74} \\ 259 \\ \underline{259.} \end{array}$$

Hèr gengur upp, þegar búið er að taka þrenna 9, þess vegna $y = 3$, þá er eptir *formulunni* $(10^3 — 1)\ 10^3$, sem $296 = 2^3.37$ á að ganga upp í. Þess vegna

$$\begin{array}{l} 296)\ 999000\ (3375 \\ \underline{888} \\ 1110 \\ \underline{888} \\ 2220 \\ \underline{2072} \\ 1480 \\ \underline{1480} \\ 0. \end{array}$$

Þá er brotlengjarinn $b = 3375$, og með honum margfaldast teljari hins fyrirsetta brots 19; kemur $64125 = pb$, svo hið lengda brot verður

$$\frac{pb}{qb} = \frac{64125}{999000}.$$

Hèr sleppi eg núllunum um stund, en deili 64125 með 999.

$$999)\ 64125\ (64\tfrac{189}{999} = B$$

$$\begin{array}{r} 5994 \\ \hline 4185 \\ 3996 \\ \hline 189. \end{array}$$

Þá er *periodus* 189, og þrístöfuð eins og hún á að vera; þess vegna

$$B = 64{,}189189189189 \cdots\cdots$$

Loksins færist komman um 3 reiti til vinstri, þar $x = 3$; kemur

$$\frac{19}{296} = 0{,}064189189189189 \cdots\cdots$$

4. dæmi, þar sem heilu töluna í B vantar.

$$\frac{1}{45} = \frac{1}{9 \,.\, 5}.$$

Hèr er 5 *factor* í 10 og það er 5^1, svo $(10^y - 1)\ 10^x = (10^y - 1)\ 10^1$. En til að finna y, verður að deila 9 með 9, og það gengur upp, svo *formulan* verður $(10^1 - 1)\ 10^1 = 90$. Þá segir hún, að 45 gangi upp í 90, og það vissum vèr áður. Nú er 45 í 90 2svar, svo brotlengjarinn b er $= 2$; og með honum margfaldast teljari hins fyrirsetta brots, 1, og

$$\frac{pb}{qb} = \frac{2}{90}$$

er hið lengda brot. Núllið úr 90 tekst frá um stund.

$$9)\ 2\ (0\tfrac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 2 \end{array}$$

og 2 er *periodus* eptir *series* (183), svo er þá

$$B = 0{,}222222 \cdots\cdots$$

Hèr er heila talan í $B = 0$, og nú færist komman um 1 reit til vinstri, svo verður

$$\frac{1}{45} = 0{,}0222222 \cdots\cdots$$

og kemur þetta heim við hina styttri aðferðina að deila 1 með 45.

186. Vèr höfum nú dvalið lengi við þessa aðferð, þó hún sè í *praxis* (framkvæmdinni) ekki nærri eins hæg, sem hin áðursagða. það gjörðum vèr vegna þess, að þessi *theoria* (skoðun) sýnir betur eðli talnanna, og hvernig á því stendur, að tugabrot, sem úr almennum brotum koma, flokka sig í þrjár deildir, þar sem fyrsta deildin innibindur í sèr þau tugabrot, sem *factorarnir* í 10, nefnilega 2 og 5, einsamlir af sèr gefa í tugakerfinu, og þau eru öll endanleg, og hafa í sèr eins marga stafi, sem stærri *exponentinn* við 2 eða 5 ákveður, eptir (180). Hin önnur deild hefir í sèr þau tugabrot, sem aðrir *factorar* af sèr gefa, og sem aldrei ganga upp í neinu tugaveldi (128), (134), heldur í tómum níundum 9999···· eptir *Fermats theoremi* og því fylgjandi setningum (158), (159). Hin þriðja deild tugabrota hefir í sèr þau brot, sem hvorki koma af *factorunum* 2 og 5 einsömlum, og heldur ekki af öðrum einsömlum, heldur af hvorumtveggju sameinuðum, ganga svo þeir nefnarar upp í tölu, sem er samsett bæði af níundum og núllum. Í báðum síðari deildunum verða tugabrotin óendanleg, vegna þess að aldrei uppgengur, eða vegna þess að níundirnar 9999···· eru = 10000 ···· — 1 eða tugaveldi að afnumnum 1; en kvótinn verður þá hin óendanlega *series* í (183). Enn framar verður það af framanskrifaðri löngu aðferð ljóst, hvernig á undangangandi stöfunum stendur, sem ganga á undan *periodunum*. þeir koma nefnilega af heilu tölunni í *B*, og núllum þeim, sem undanfeld voru í deilingunni, en bætt upp aptur með því að færa kommuna til vinstri, og er það ný deiling, sem gjörir það að verkum, að *periodurnar* þokast til hægri. Hèr tölum vèr einkanlega um tugakerfið; en út af sömu höfuð-eiginlegleikum geta þeir, sem vilja, fundið, hvernig þetta kann að breytast í hinum öðrum tölukerfum.

187. það kallast fullkomnar *periodur*, þegar $10^s - 1 \equiv 0$ (*mod.* q) og s, eða stafafjöldinn í *periodus*, er $= q - 1$. En það er merkilegt við sumar *periodur* yfir höfuð, og einkum þær, sem langar eru, að þegar búið er að fá *perioduna* af $\frac{1}{q}$, þá þarf ei að neyta margföldunar til að finna $\frac{r_m}{q}$. þó er það með því móti, að *multiplicator* sè leif þeirrar *periodu*. Til þess er

ei óhentugt að hafa uppsetningarmáta *Ramusar* (153) og (155). Til dæmis: *Periodan* við 7 er fullkomin, því $s = q - 1 = 7 - 1 = 6$. Setjum vèr þá þannig upp:

$$m = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$$
$$r_0 = 1, \quad r_m = 3\ 2\ 6\ 4\ 5\ 1$$
$$\frac{r_{m-1}\,10}{7} = 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7,$$

þá er

$$\tfrac{1}{7} = 0,\overline{142857},$$

sem stendur í kvótalínunni. Vilji eg hafa þetta brot 2faldað, leita eg að leifinni 2 í miðlínunni, tek svo kvótann, sem af henni 10faldri fæst í neðstu línu einu sæti nær hægri hendi, þar standa einnig 2. Með þeim tölustaf byrja eg *perioduna*, og held þar áfram út *perioduna*, og þegar stafirnir þrjóta hægra megin, byrja eg vinstra megin, og fæ

$$\tfrac{2}{7} = 0,\overline{285714}.$$

Vilji eg 3falda, byrja eg á kvótanum hægra megin við leifina 3, og þar standa 4, þá fæ eg

$$\tfrac{3}{7} = 0,\overline{428571}.$$

Þannig fæst einnig:

$$\tfrac{4}{7} = 0,\overline{571428}.$$

188. Þegar nota skal þessa aðferð, sem í (187) var sýnd, þá vantar opt ýmsar tölur í leifarnar, sem teljararnir krefja. Þess vegna hafa sumar tölur, er í nefnara stað standa, tvær eða fleiri *periodur*. Þetta á sèr stað hjá hinum ófullkomnu *periodum*; því hinar fullkomnu taka allar leifar, sem minni eru en *divisor*. Þetta má t. d. sjá á tölunni 13, sem reiknast verður með tveimur *periodum*, þannig:

$$m = 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6$$
$$r_0 = 1, \quad r_m = 10\quad 9\quad 12\quad 3\quad 4\quad 1$$
$$\frac{r_{m-1}\,10}{13} = 0\quad 7\quad 6\quad 9\quad 2\quad 3.$$

Þar af fæst:

$$\tfrac{1}{13} = 0,\overline{076923} \quad \tfrac{3}{13} = 0,\overline{230769} \quad \tfrac{4}{13} = 0,\overline{307692}$$
$$\tfrac{9}{13} = 0,\overline{692307} \quad \tfrac{10}{13} = 0,\overline{769230} \quad \tfrac{12}{13} = 0,\overline{923076}.$$

Hèr vantar teljarana 2, 5, 6, 7, 8, 11; þá má taka hvern þeirra sem vill fyrir r_0, svo sem ef vèr tökum 2, þá er

	$m =$	1	2	3	4	5	6
$r_0 = 2,$	$r_m =$	7	5	11	6	8	2
$\frac{r_{m-1}10}{13}$	$=$	1	5	3	8	4	6.

Hèr af fæst:

$$\tfrac{2}{13} = 0,\overline{153846} \quad \tfrac{5}{13} = 0,\overline{384615} \quad \tfrac{6}{13} = 0,\overline{461538}$$

$$\tfrac{7}{13} = 0,\overline{538461} \quad \tfrac{8}{13} = 0,\overline{615384} \quad \tfrac{11}{13} = 0,\overline{846153}.$$

Sama er, ef vèr tökum $r_0 = 5$, þannig:

	$m =$	1	2	3	4	5	6
$r_0 = 5,$	$r_m =$	11	6	8	2	7	5
$\frac{r_{m-1}10}{13}$	$=$	3	8	4	6	1	5.

Leifarnar r_m má einnig finna í þessum síðari aðferðum með því, að margfalda leifarnar, sem koma af $r_0 = 1$, með 2 eða 5, nefnilega:

$1 \,.\, 2 \equiv 2$ (*mod.* 13) $\quad 10 \,.\, 2 \equiv 7$ (*mod.* 13) o. s. frv.

og $1 \,.\, 5 \equiv 5$ (*mod.* 13) $\quad 10 \,.\, 5 \equiv 11$ (*mod.* 13) o. s. frv.

189. Í tölulið (157) var sýnt samband milli *modulanna g* og *h*, og að þegar haldið væri áfram deilingunni til hins tvöfalda *index*, þá kæmi sömu leifar öfugar, en kvótarnir úr fyrra og síðara helmingi umferðanna fyltu 9. Þetta framsetur *Ramus* í setningu hèr um bil þannig: Þegar q er frumtala önnur en 2 og 5, og hið óstyttanlega brot $\frac{p}{q}$ gefur *periodu* með s tölustöfum og s er jöfn tala $= 2n$, eða *periodan* hefir þessa mynd:

$$b_1 b_2 b_3 \cdots\cdots b_n b_{n+1} b_{n+2} b_{n+3} \cdots\cdots b_{2n},$$

þá er, hvað tölustafina í *periodus* snertir:

$$9 = b_1 + b_{n+1} = b_2 + b_{n+2} = b_3 + b_{n+3} \cdots\cdots b_n + b_{2n},$$

einnig hvað leifarnar snertir:

$$q = r_1 + r_{n+1} = r_2 + r_{n+2} = r_3 + r_{n+3} \cdots\cdots = r_n + r_{2n}.$$

Hèr er gefið:

$$10^{2n} \equiv 1 \ (mod.\ q),$$

því þegar búið er að bæta smámsaman $2n$ núllum við r_0, sem var $= 1$, þá kemur eptir $2n$ deilingar aptur leif $r_{2n} = 1$; samber dæmin $q = 7$ og $q = 13$ í töluliðunum (187) og (188). Flytjum 1 yfir um *congruens*merkið með *minus;* kemur:

$$10^{n2} - 1 \equiv 0 \ (mod\ q).$$

En $10^{2n} - 1 = (10^n - 1)(10^n + 1)$ eptir (54, *D*); þess vegna:

$$(10^n - 1)(10^n + 1) \equiv 0 \ (mod.\ q).$$

þetta segir, að q gangi upp í $(10^n - 1)(10^n + 1)$; en upp í $10^n - 1$ gengur q ekki, þar $s = 2n$ er hin lægsta tala fyrir ofan 1, sem gefur $10^s - 1 \equiv 0$ (*mod. q*).

[Samber dæmin 7 og 13. $10^n = 10^3$, $10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999$.

$$7)\ \overset{2\ 1\ 5}{9\,9\,9} \quad \overline{142} \qquad\qquad 13)\ \overset{8\ 11}{9\,9\,9} \quad \overline{76}$$

].

En þar q gengur ekki upp í þessum *factor* $10^n - 1$, en á þó að ganga upp í *productinu* $(10^n - 1)(10^n + 1)$, þá verður q að ganga upp í hinum *factornum* $10^n + 1$, eptir (117), (118).

[Samber dæmin:

$$7)\ \overset{3\ 2\ 0}{1\,0\,0\,1} \quad \overline{143} \qquad\qquad 13)\ \overset{9\ 0}{1\,0\,0\,1} \quad \overline{77}$$

].

þess vegna:

$$10^n + 1 \equiv 0 \ (mod.\ q)$$

eða, með því að flytja 1 yfir um með *minus*,

$$10^n \equiv -1 \ (mod.\ q).$$

En við þessar *congruentiur* er það leyfilegt, að bæta heilum *modulus* inn í þær, einnig taka hann burtu (104). þess vegna með því að bæta q inn í, verður

$$10^n \equiv q - 1 \ (mod.\ q).$$

þessi samsvaran margfaldast með 10^t (110); kemur:

$$10^{n+t} \equiv 10^t(q - 1) \ (mod.\ q).$$

En t þýðir 0, 1, 2, 3 .... annaðhvort frá upphafi, ellegar eptir n deilingar eða viðbætt núll. Hèr af leiðir þá:

$$10^{n+t} \equiv 10^t q - 10^t \ (mod.\ q).$$

Hèr má nú burtkippa $10^t q$; kemur

$$10^{n+t} \equiv -10^t \ (mod.\ q).$$

þetta má margfalda með teljaranum p, sem má vera hvaða tala sem vill:

$$p10^{n+t} \equiv -p10^t \ (mod.\ q).$$

þetta gildir einnig, þegar r_0 ekki er látið vera $= 1$, eins og gjört var í (188).

Hinar minstu leifar þessara talna, eða þeirra *residua minima*, verða r_{n+t} og r_t, og þess vegna verður *congruentian*

$$r_{n+t} \equiv - r_t \ (mod.\ q).$$

Hèr bætist inn heill *modulus*, til þess að *residuið* hægra megin ekki verði *negatift;* kemur

$$r_{n+t} \equiv q - r_t \ (mod,\ q).$$

En þetta þarf ekki að skrifast sem *congruentia*, heldur má það einnig vera líking

$$r_{n+t} = q - r_t,$$

því tölurnar geta verið alveg ákvarðaðar, þegar tekin eru *residua minima*.

[Tökum í ofanskrifuðu dæmi með deilinum 7 töluna $t = 1$, en þar er $n = 3$; þá er $10^{n+t} = 10^4 = 10000$ og $10^t = 10^1 = 10$, en p látum vèr vera $= 1$; þá verður eptir $p10^{n+t} \equiv - p10^t$ *(mod. q).*

$$10^4 \equiv - 10 \ (mod.\ 7).$$

Deilum nú báðum leifunum með 7 og tökum minstu leifarnar, sem ekki yfirganga *modulus* (104), þó ekki sè hinar allraminstu leifar, sem ekki yfirstíga hinn hálfa *modulus*.

$$7)\ \overset{3\,2\,6\,4}{10000} \qquad\qquad 7)\ -10\ (-1$$

$$\underline{1428.} \qquad\qquad \begin{array}{r} -\ 7 \\ \underline{+} \\ -\ 3. \end{array}$$

Hin fyrri leifin er hèr $+ 4$, en hin síðari $- 3$. Þær eru, eins og allir sjá, ekki jafnar, en *congruentes* eru þær þó, því hèr mátti eins vel í síðari deilingunni taka kvótann $- 2$, þannig:

$$7)\ -10\ (-2$$

$$\begin{array}{r} -\ 14 \\ \underline{+} \\ +\ \ 4. \end{array}$$

Þessi leif gat einnig fundizt með því að bæta *modulus* við leifina $- 3$, því $- 3 + 7 = + 4$, eins og gjört var í *congruentiunni*

$$r_{n+t} \equiv q - r_t \ (mod.\ q).$$

Nú eru þá leifarnar ekki einungis samsvarandi, heldur og einnig jafnar, $4 = 4$; þess vegna má það vera sannleikur:

$$r_{n+t} = q - r_t\ ].$$

Congruentian

$$r_{n+t} \equiv -r_t \ (mod.\ q)$$

gat ekki verið líking, vegna þess að játandi stærð getur ekki verið jöfn neitandi stærð, þegar báðir bókstafirnir r_{n+t} og r_t eru játandi stærðir, sem hèr hefir stað, vegna þess menn taka einungis *positífar* leifar, þegar menn eru að reikna *periodurnar*. En leifarnar urðu báðar játandi, þegar q var bætt inn í *congruentiuna*. En þegar bæði *residua* eru minni en *modulus* og bæði *positif*, þá geta þau ekki verið samsvarandi, nema þau sè undir eins jöfn. Þar nú r_t, eins og r_{n+t}, eru minni en *modulus*, þá verður líka $q - r_t$ minni tala en *modulus*, því bæði *subtrahendus* og *differentia* eru í *positif* tölum minni en *minuendus*. Af þessu leiðir þá, að samsvaranin

$$r_{n+t} \equiv q - r_t \ (mod.\ q)$$

snýst í líkingu, eða verður jafngild henni, nefnilega

$$r_{n+t} = q - r_t.$$

Af þessari líkingu leiðir aptur

$$r_{n+t} + r_t = q.$$

Deili eg þessu með q, kemur

$$\frac{r_{n+t}}{q} + \frac{r_t}{q} = 1.$$

Margfaldist þetta með 10, kemur

$$\frac{r_{n+t}10}{q} + \frac{r_t 10}{q} = 10.$$

Þegar því leifar þessar margfaldast með 10, með því að bæta núlli aptan við leifina og deilast svo með q, þá verður hin fulla summa $=$ 10. En þessar tölur, sem hèr samanlagðar voru, eru blandnar tölur, og þar menn í þessum deilingum einungis hirða heilu tölurnar, er næst ganga, og það verða kvótastafirnir, þá verður summan einungis $=$ 9. Hèr með sannar Ramus, að tölustafirnir úr fyrra og síðara helmingi *periodunnar* sè samanlagðir $=$ 9; nefnilega

$$b_{n+t+1} + b_{t+1} = 9.$$

Samber dæmið með deilinum 7 í (187). Hèr er *index* við b einum meiri en *index* við r, af því hver kvóti kemur úr næstundangangandi leif, nefnilega b_{n+t+1} úr r_{n+t}.

190. Hèr við þessa sönnun kann það sýnast athugavert, að þegar brotunum er slept úr blöndnum tölum, sem til samans eru 10, hvort þá verði summan af heilu tölunum $= 9$. Menn gæti hugsað sèr, að hún kynni að verða 8 eða enn þá minni. En til þess að þetta ekki verði, útheimtist, að summa brotanna í hinum 10földuðu leifum ekki yfirstígi 1; og það gjörir hún hèr ekki, heldur verður $= 1$; því nefnarinn er q, og summa teljaranna verður einnig q eptir *formulunni* $r_{n+t} + r_t = q$; því þegar hinar einföldu leifar, sem fylla q, margfaldast með *10* og deilast með q, þá koma nýjar leifar, sem alt eins fylla *modulus* q, sem hinar fyrri. Þettu sèst á framanskrifuðu dæmi með deilinum 7, (187).

$$
\begin{array}{llll}
t = 0 & r_{n+t} = 6 & \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7} & \\
 & r_t \quad = 1 & \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}; & 8\frac{4}{7} + 1\frac{3}{7} = 10;\ 8 + 1 = 9 \\
t = 1 & r_{n+t} = 4 & \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7} & \\
 & r_t \quad = 3 & \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}; & 5\frac{5}{7} + 4\frac{2}{7} = 10;\ 5 + 4 = 9 \\
t = 2 & r_{n+t} = 5 & \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7} & \\
 & r_t \quad = 2 & \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}; & 7\frac{1}{7} + 2\frac{6}{7} = 10;\ 7 + 2 = 9 \\
t = 3 & r_{n+t} = 1 & \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7} & \\
 & r_t \quad = 6 & \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}; & 1\frac{3}{7} + 8\frac{4}{7} = 10;\ 1 + 8 = 9.
\end{array}
$$

Þessi útreikningur er gjörður eptir *formulunni*

$$\frac{r_{n+t}10}{q} + \frac{r_t}{q} = 10,$$

og ef hann er borinn saman við *periodu*-útreikninginn í sama dæmi í (187), þá sèst, að reikningurinn þar og hèr er allur hinn sami. Teljararnir, sem hèr fást út af r_{n+t} og r_t, fylla *modulus* (sem í þessu dæmi er 7), og fyrir það verður summa brotanna allsstaðar $= 1$. En þessir teljarar eru ekki einungis leifar í deilingunum hèr, heldur eru þeir og leifar í útreikningi *periodunnar* í (187), og eru því bundnir ofanskrifuðu lögmáli

$$r_{n+t} + r_t = q,$$

ellegar, sem sama er,

$$\frac{r_{n+t}}{q} + \frac{r_t}{q} = 1.$$

Burtvörpun brotanna úr blönduðu tölunum samanlögðum orsakar því það, að 1 fellist af 10, svo þar úr verða 9, eins og áður er sagt.

191. Að snúa tugabroti í alment brot.

Þetta verkefni er gagnstætt verkefninu (179).

Tugabrotið getur, eins og áður er sagt, verið með þrennum hætti:

1, endanlegt (180).

2, *periodiskt* eða umferðabrot (181).

3, hálf*periodiskt* eða hálfumferðabrot (184).

Sè tugabrotið endanlegt, þarf ekki annað til að gjöra það að almennu broti, en rita nefnarann undir eptir venju almennra brota; þá er það orðið alment brot. En nefnarinn er 1 með svo mörgum núllum aptan við, sem tugabrotsstafirnir eru (164). Síðan má stytta það eptir brotstyttingarreglum (85). En ekki verður það stytt nema með 2 og 5, eða veldunum þar af, vegna þess aðrar tölur ganga ekki upp í nefnaranum.

Sè tugabrotið *periodiskt*, má taka eina *periodu* þess, og rita undir hana í nefnara stað svo opt 9, sem stafir eru í henni. Hið almenna brot, sem þá útkemur, er = hinu gefna tugabroti. Samber (182) og (183). Þetta útkomanda almenna brot má reyna að stytta; það sèst á nefnaranum, með hvaða tölum reyna má að stytta, og er það einkum með 3, 9, 11 o. s. frv.

Sè tugabrotið hálf*periodiskt*, þá er það jafnt því almenna broti, er hefir fyrir teljara undangangandi stafina margfaldaða með svo opt skrifuðum 9, sem stafir eru margir í *periodus*, og þar við bætta eina *periodu*. En fyrir nefnara hefir það eins opt skrifaða 9, sem stafir eru í *periodus*, og þar á eptir svo mörg núll, sem undangangandi stafirnir eru. Það er með *formulu* þannig teiknað:

$$x = \frac{U_n\,(10^s - 1)\,p_s}{(10^s - 1)\,10^n}$$

og merkir þar U_n undangangandi stafina n að tölu, p_s *periodus* með s tölustöfum, en $10^s - 1$ eru 9 skrifaðir s sinnum. En þessi *formula* getur og ritazt þannig:

$$x = \frac{U_n\,10^s + p_s - U_n}{(10^s - 1)\,10^n}$$

og segir hún, að frá undangangandi stöfunum og einni *periodus* (ɔ: $U_n\ 10^s + p_s$) skuli draga undangandi stafina U_n, og þá sè fenginn teljarinn. En nefnarinn sè sami sem áður.

192. Sönnun fyrir reglunni, þegar brotið er *alperiodiskt*, er nokkurn veginn auðsèn af (183). Þó viljum vèr sanna hana hèr nokkuð öðruvísi. Setjum, að *periodus* sè fjórstöfuð eða $s = 4$, og stafirnir í henni sè *abcd*, þá verður *periodiska* tugabrotið svona:

$$x = 0,abcdabcdabcdabcd \cdots$$

margfalda brotið með $10^s = 10^4 = 10000$

$$10000\,x = abcd,abcdabcdabcdabcd \cdots$$

drag hèr frá hið einfalda brot

$$x = 0,abcdabcdabcdabcd \cdots$$

$$(10^4 - 1)x = abcd.$$

Brotin ganga upp hvort á móti öðru, þá

$$9999\ x = abcd,$$

og þá $x = \dfrac{abcd}{9999}$.

Upp á sama kæmi, hvað margir stafir sem væri í *periodus*; einungis á að margfalda með 10^s og deila með 9 skrifuðum s sinnum.

Með líkum hætti má gjöra hálf*periodisku* tugabrotin að almennum brotum, nefnilega: að margfalda brotið x með svo háu veldi af 10, sem undangangandi stafirnir og stafirnir í einni *periodu* eru margir til samans. Skrifa þar undir brotið x margfaldað með svo háu veldi af 10, sem undangangandi stafirnir eru margir; drag svo hið síðara *product* frá hinu fyrra. Setjum undangangandi stafina *pqr* og *perioduna abcd*, þá er

$$x = 0,pqrabcdabcdabcdabcd \cdots$$

$$10^{3+4}\ x = pqrabcd,abcdabcdabcd \cdots$$

$$10^3\ x = pqr,abcdabcdabcd \cdots$$

$$10^3(10^4-1)x = pqrabcd - pqr$$

$$x = \frac{pqrabcd - pqr}{(10^4-1)\ 10^3}$$

$$= \frac{pqrabcd - pqr}{9999000.}$$

Þegar hèr vinstra megin var frádregið í *coëfficientunum* við x

$$10^{3+4}\ x = 10^3.10^4\ x$$

$$10^3\ \ x = 10^3.1\ .\ x,$$

þá var 10^3 sameiginlegur *factor*, og gat því sezt fyrir utan *parenthesin*. Þar á móti voru 10^4 í *minuendus* og 1 í *subtrahendus* ósameiginlegir *factorar*, dragast því frá, og verða $(10^4—1)$. Samber (41).

Með þessu er alveg sönnuð reglan seinast í (191), nefnilega, að frá undangangandi stöfunum, og einni *periodus pqrabcd*, skuli draga undangangandi stafina *pqr*, og þessu deila með svo mörgum 9, sem stafir eru í *periodus*, og þar aptan við skrifuðum svo mörgum núllum, sem undangangandi stafirnir eru. Það er með $(10^s - 1)\ 10^n$.

Síðari *formulunni* (191) ber og saman við þessa reglu, því hvað teljarann áhrærir, er

$$\begin{array}{rcl} U_3\ 10^4 = pqr\ .\ 10^4 & = & pqr0000 \\ p_4 & = & abcd \\ \hline U_3\ 10^4 + p_4 & = & pqrabcd \\ -\ U_3 & = & -\ pqr \\ \hline U_3\ 10^4 + p_4 - U_3 & = & pqrabcd - pqr. \end{array}$$

Hèr með er þá sannað, að reglunni seinast í (191) beri saman við síðari *formuluna* þar á undan. En það er hægt að sanna, að báðum *formulunum* beri saman, því í

$$U_n\ 10^s + p_s - U_n$$

má færa þá liði saman, sem U_n er í, þannig:

$$U_n\ 10^s - U_n + p_s,$$

útiloka svo hinn sameiginlega *factor* U_n í þessum liðum og skrifa hann fyrir utan *parenthesin*, en hina ósameiginlegu *factora* 10^s og 1 fyrir innan, þannig:

$$U_n\ (10^s - 1) + p_s.$$

Hèr er þá búið að sýna, að þetta þrent

$U_n\ (10^s - 1) + p_s \quad U_n\ 10^s + p_s - U_n$ og $pqrabcd - pqr$

er eitt og hið sama, þegar í þeirri seinustu mynd að eins stafafjöldanum í *pqr* og *abcd* er breytt eptir kringumstæðunum.

193. Dæmi upp á tugabrot gjörð að almennum brotum og styttingar þeirra; sem og reglur um *factora* nefnara þeirra, sem skrifast með eintómum 9.

1. Endanleg tugabrot

0,075 $= \frac{75}{1000}$; samber (164), þar sem talað er um, hvers vegna núll er sett framan við brotið fyrir aptan kommuna.

$$\frac{75}{1000}\overset{5}{\Big|}\frac{15}{200}\overset{5}{\Big|}\frac{3}{40} \text{ ellegar } \frac{75}{1000}\overset{25}{\Big|}\frac{3}{40}$$

$$0{,}222464 = \frac{222464}{1000000}.$$

Nefnarans *factorar* eru 2 og 5 fyrir hvert núll í nefnaranum, þess vegna eru hans *factorar*

2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5,

en engir 5 ganga upp í teljaranum eptir deilileikseinkunninni með 5. $2^3 = 8$ ganga upp í teljaranum eptir deilileikseinkunninni:

$$\frac{222464}{1000000}\overset{8}{\Big|}\frac{27808}{125000}\overset{8}{\Big|}\frac{3476}{15625}.$$

Þar *factorinn* 2 ekki kemur optar fyrir í nefnaranum en 6 sinnum, og nú er búið að stytta með honum 6 sinnum, þá verður brotið ekki stytt framar.

2. *Alperiodisk* tugabrot.

Þar nefnari almenna brotsins, sem úr tugabrotinu fæst fyrst, hefir þetta útlit:

$$\frac{abcd\cdots}{9999\cdots}$$

þá viljum vèr fyrst hugleiða *factora* nefnarans. Deilum vèr nefnaranum með 9, kemur 1111···· eða tala, sem er eintómir einar. En þessi tala verður aptur deilileg með ýmsum tölum, eptir því sem þessir einar eru margir. Vèr teljum því einana og setjum fjölda þeirra $= E$, en töluna sjálfa 1111···· köllum vèr N. Þá getur skeð menn vilji stundum nota eptirfylgjandi reglur:

α, Gangi 2 upp í E, þá er N deililegt með 11.

β, Gangi 3 upp í E, þá eru *factorarnir* í N 3,37.

γ, Gangi 4 upp í E, þá er 101 *factor*, auk 11, sem talinn var við 2.

δ, Gangi 5 upp í E, þá eru *factorarnir* 41 . 271.

ε, Gangi 6 upp í E, þá eru *factorar* 7, 13, auk áðurtaldra 11, 3, 37, við 2 og 3.

ζ, Gangi 7 upp í E, þá eru *factorar* 239, 4649.

η, Gangi 8 upp í E, þá ganga 73, 137 upp í N, auk 11 og 101.

ϑ, Gangi 9 upp í E, þá er *factor* í N 33667, auk 3^2, 37.

ι, Gangi 10 upp í E, þá gengur 9091 upp í N, auk áðurtaldra 11, 41, 271 við 2 og 5.

þessar reglur má nota við allar þær tölur, sem samsettar eru af áðurtöldum t. d, ef $E = 12 = 2 \,.\, 6$, þá eru allir *factorar* úr 2 og 6 einnig *factorar* í N. En svo þarf líka að deila N með *producti* þeirra, þeir eru $3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 37$. *Product* þeirra er 111111; þess vegna

$$\frac{11111111111}{111111} = 1000001;$$

fæst þá nýr *factor*, sem hèr bætist við.

Nú tökum vèr til sjálfra dæmanna:

0,4444444........

þetta brot hefir einstafaða *periodu* 4, og eptir (192) er það $= \frac{4}{9}$.

Nefnarinn er 3 . 3 og hefir *factorana* 3 og 3, en þeir ganga ekki upp í teljaranum, svo brotið er óstyttanlegt.

0,1818181818........

þetta brot hefir tvístafaða *periodu* og er $= \frac{18}{99}$ eptir (192). Með 9 deilist fyrst nefnarinn, og ganga 9 einnig upp í teljaranum; fæst þá

$$\frac{2}{11}$$

og það brot verður ekki stytt.

0,428571428571....

þetta brot er

$$= \frac{428571}{999999}.$$

Nefnari þessi deilist með 9, og 9 ganga einnig upp í teljaranum, svo brotið má stytta með 9, verður það

$$\frac{47619}{111111}.$$

Eptir reglunni ε er $111111 = 3.7.11.13.37$; 3 ganga upp í teljaranum.

$$\begin{array}{r} 47|619 \\ \underline{47} \\ 7)\ \overline{572} \\ \overline{81.} \end{array}$$

7 ganga ekki upp í tölunni, og má stryka yfir 7.

$$\begin{array}{r} 11)\ \underline{572} \\ 52. \end{array}$$

11 ganga upp í henni.

$$\begin{array}{r} 13)\ \underline{572} \\ 44. \end{array}$$

[illegible] ganga upp [illegible] teljaranum. Nú er eptir að reyna með 37 í [illegible]

[illegible]9
 47
37) 666 (18
 37
 296
 296

37 ganga upp í 47619. Nú er framkvæmið af

$$3 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 37 = 15873.$$

þá gengur 15873 upp í teljara 47619 og nefnara 111111.

15873) 47619 (3 15873) 111111 (7
 47619 111111

Hið stytta brot er því $\frac{3}{7}$. þessi reikningur kann þykja nokkuð langur. Hann hefði má ske skemri orðið með því að stytta brotið með hverjum factor sèr í lagi.

$$\frac{47619}{111111} \underset{3}{\smile} \frac{15873}{37037} \underset{11}{\smile} \frac{1443}{3367} \underset{13}{\smile} \frac{111}{259} \underset{37}{\smile} \frac{3}{7}.$$

Fljótara hefði sammælirinn fundizt eptir (88), þannig:

47619) 111111 (2
 95238
 15873) 47619 (3
 47619.

En svo er eptir að deila teljara og nefnara með sammælinum 15873.

3. Hálf*periodisk* tugabrot.

þar nefnari almenna brotsins, sem fyrst fæst úr tugabrotinu, hefir þetta útlit

$$(10^s - 1)\, 10^n$$

eða nokkrum sinnum skrifaðir 9 með nokkrum núllum aptan við, þá skoðum vèr fyrst samsetningu nefnarans, og hún er

$$\frac{10^s - 1}{9} \,.\, 3^2 \,.\, 2^n \,.\, 5^n.$$

En hvað áhrærir $\frac{10^s - 1}{9}$ eða $1111 \cdots$, má nota reglurnar í þessum töluliði í 2; göngum vèr svo til sjálfra dæmanna:

$$0{,}069444444 \cdots$$

Hèr eru undangangandi stafirnir 3, og einstöfuð *perioda*, þá er eptir *formulunni*

$$x = \frac{U_n(10^s - 1) + p_s}{(10^s - 1)10^n}$$

$$= \frac{069 . 9 + 4}{9000}$$

$$= \frac{621 + 4}{9000}$$

$$= \frac{625}{9000} = \frac{5 . 5^3}{1 . 3^2 . 2^3 . 5^3}$$

$$= \frac{5}{3^2 . 2^3} = \frac{5}{72}.$$

Tökum annað dæmi:

0,79545454545454 ....

Hèr eru undangangandi stafir tveir og tvístöfuð *perioda*. Þetta viljum vèr reikna eptir *formulunni*

$$\frac{pqab - pq}{9900.}$$

Þá er

$$\begin{array}{r} 7954 \\ 79 \\ \hline 7875 \end{array}$$, sem er teljarinn.

$$\frac{7875}{9900} = \frac{7875}{11 . 9 . 2^2 . 5^2}.$$

Þegar búið er að leysa nefnarann upp í hans gjörendur, er þægilegt eptir deilileikseinkunnunum með hinum sömu gjöröndum smámsaman að deila teljaranum og hans kvótum þannig:

$$\begin{array}{rr} 5) & 7875 \\ 5) & 1575 \\ 9) & 315 \\ & 35 \end{array} \quad \text{þá} \quad \frac{35 . 9 . 5^2}{11 . 9 . 2^2 . 5^2} = \frac{35}{11 . 2^2} = \frac{35}{44}.$$

Tökum brotið

0,00123123123123123 ....

og höfum *formulana*

$$\frac{U_n(10^s - 1) + p_s}{(10^s - 1)10^n}$$

$$U_n = 00 \quad s = 3 \quad p_s = 123.$$

$$\frac{0.999+123}{99900}=\frac{123}{99900}=\frac{123}{111.9.2^2.5^2}$$

$$=\frac{123}{3.37.9.2^2.5^2}=\frac{3.41}{3.37.9.2^2.5^2}=\frac{41}{37.9.2^2.5^2}=\frac{41}{33300}.$$

Tökum blöndnu töluna

3,04176281462814 ....

Heila talan má geymast sèr. Höfum *formuluna*

$$\frac{pqrsabcde - pqrs}{999990000}$$

$$\begin{array}{r} 041762814 \\ 0417 \\ \hline 41762397; \end{array}$$

brotið $\frac{41762397}{999990000}=\frac{41762397}{11111.9.2^4.5^4}=\frac{41762397}{41.271.9.2^4.5^4}.$

Hvorki 41 nè 271 nè 2 nè 5 ganga upp í teljaranum. Talan 41 er g_5 eptir töflunni í (146). Einungis 3 ganga upp í teljaranum, svo brotið verður ásamt heilu tölunni stytt

$$3\frac{13920799}{333330000}.$$

194. Þegar tugabrotin eru stafamörg, verður erfitt að reikna með þeim óskertum, og öldungis ómögulegt, þegar þau eru óendanleg. Þess vegna nota menn einungis nokkra stafi framan af þeim. En þá er þörf að vita, hver skakki af því hlýzt, þegar slept er stöfum aptan af þeim, ellegar vita, hvað marga tölustafi þarf að hafa, til þess að reikningurinn nái sínum tilgangi.

Í samlagningu má framkvæma þetta þannig: Sè brotin þannig ásigkomin, að þau hafi n tölustafi, og skakki þeirra þess vegna sè $<\frac{1}{10^n}$, (samber (181)), og hann sè *positif*, það er að skilja, að þar þurfi svo miklu að bæta við það, sem í reikninginn er tekið, að hin rètta stærð framkomi; þá verður summa allra skakkanna við m samanlögð tugabrot $<\frac{m}{10^n}$. Nú skal talan m vera skrifuð með q tölustöfum, og $10^{q-1}<m<10^q$, þá er skakkinn í summunni $<\frac{1}{10^{n-q}}$; því ef 10^q er sett í staðinn fyrir m í $\frac{m}{10^n}$, kemur $\frac{10^q}{10^n}$, sem stytt með teljara sínum verður $\frac{1}{10^{n-q}}$. Vilji eg nú, að þessi skakki skuli vera $<\frac{1}{10^r}$, þá set eg

$$n - q = r;$$

þá er $\quad n = r + q.$

Þetta segir, að samleggjendurnir þurfi að vera teknir með $r + q$ tugabrotsstöfum, ef summan skal vera áreiðanleg með r tugabrotsstöfum. t. d. ef leggja skal saman 14 tugabrot, sem ákvörðuð eru með nálgun, þá er 14 tveir tölustafir $= q$, nefnilega 10^{q-1} (eða 10) $< m < 10^q$, það er $< 10^2$, sem er 100, þá skal, svo lengi sem samleggjandafjöldinn liggur milli 10 og 100, ætla tvo staði fyrir vanhöldunum eða skakkanum. En með sama hætti, ef samleggjandatalan er milli 1 og 10, það er 10^0 og 10^1, er nóg að ætla 1 staf fyrir skakkanum, eða hafa einum fleiri tugabrotsstafi í samleggjöndunum, en menn vilja hafa áreiðanlega í summunni, t. d. vilji eg ákvarða summuna af eptirfylgjandi 5 brotum og sjötta nákvæmu, að ekki skakki í þúsundustu pörtum eða $\frac{1}{10^r}$, þá er $r = 3$ og $q = 1$, þá verð eg að leggja þau saman með $r + q = 4$ tugabrotsstöfum þannig:

			$\overbrace{}^{42}$
0,3333	=	$\frac{1}{3}$	14
0,6666	=	$\frac{2}{3}$	28
0,1904	=	$\frac{4}{21}$	8
0,1428	=	$\frac{1}{7}$	6
0,4285	=	$\frac{3}{7}$	18
0,5	=	$\frac{1}{2}$	21
2,2616		$2\frac{11}{42}$	95.

```
42) 11,0 (0,2619
    8 4
    2 60
    2 52
      80
      42
      380
      378
        2.
```

Hèr er settur hvor við hliðina á öðrum reikningurinn með tugabrotunum og með almennu brotunum, og þar að auki hið útkomanda almenna brot gjört að tugabroti. Hèr sèst þá, að reikningunum ber saman í þúsundustu pörtunum, eins og hin fundna regla fyrirsagði. En í tíuþúsundustu pörtunum fer brotunum að muna, og sèst það, þegar summa tugabrotanna 2,2616 er dregin frá tugabrotinu, sem úr verður almenna brotinu 2,2619, þannig:

$$\begin{array}{r} 2{,}2619 \\ \underline{2{,}2616} \\ 0{,}0003, \end{array}$$

og munar þá um $\frac{3}{10000}$, sem er *positifur* skakki.

195. Sè nú brotin þannig tekin, að skakkinn við hvert þeirra liggi milli $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, nefnilega sè allsstaðar minni en $\frac{1}{2}$ eining hins seinasta *decimals*, sem tekinn er, og sè p tala þeirra brota, sem hafa *negatifan* skakka, og af því hinn seinasti *decimal* var hækkaður um 1, svo þau þess vegna eru of stór; en hin aptur of lítil; og þessi of litlu brot eru þá að tölu $m-p$, þá verður skakkinn í summunni að liggja milli $\frac{m-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ *positifa* megin, og $\frac{-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ *negatifa* megin. Sè nú hið síðara dregið frá hinu fyrra, kemur:

$$\begin{array}{lr} \text{Efsta skakkamark} & \frac{m-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \\ \text{Neðsta skakkamark} & \frac{-p}{-2} \cdot \frac{1}{10^n} \\ \hline \text{Skakkasvæði frá neðsta marki} & \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}. \end{array}$$

Hèr kemur skakka eða óvissusvæðið hálfu minna en áður var (194), þegar m voru *addendar* allir of litlir og gátu skakkað nærri $\frac{1}{10^n}$, í stað þess að nú eru sumir of stórir, en sumir of litlir, og skakka mest $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Sama dæmi, sem áður, viljum vèr nú skoða með hækkuðum seinasta *decimal*, þar sem hinn fyrsti slepti var 5 eða meiri en 5.

A		*B*
0,3333	nákvæmar	0,333333
0,6667		0,666667
0,1905		0,190476
0,1429		0,142857
0,4286		0,428571
0,5		0,5
2,2620.		2,261904.

Sè nú hið rètta brot 2,2619 (194) dregið hèr frá summunni í samlagningunni *A*, þannig:

$$\begin{array}{r} 2,2620 \\ 2,2619 \\ \hline 0,0001, \end{array}$$

þá sèst, að hinn nýi reikningur gefur summuna um $\frac{1}{10000}$ of stóra, en hinn fyrri um $\frac{2}{10000}$ of litla.

Af þessum 6 brotum, sem hèr voru samanlögð, var 1 nákvæmt, sem er 0,5, en 5 ónákvæm; þess vegna $m = 5$.

Af þessum 5 brotum eru 4 með hækkuðum *decimal*, og þess vegna of stór, eða með *negatifum* skakka, svo p er $= 4$, en hin $m - p$ eða $5 - 4 = 1$ eða 1 brot er þá of lítið eða með *positifum* skakka. þessi tala $\frac{m-p}{2}$ merkir $m - p$ helminga einingar hins n^{ta} *decimals*, sem hèr er hinn 4ði eða tíuþúsundasti partur úr tölunnar einingu; og er það *positifur* skakki $= 0{,}00005$. $\frac{-p}{2}$ merkir *negatifan* skakka, sem í hæsta lagi getur verið p hálfar einingar hins 4ða *decimals*. Báðir skakkarnir eru reiknaðir frá tölum reikningsins, sem dæmast á, og þess vegna frá hans summu, sem hèr er 2,2620, í samlagningunni A. Hèr er $p = 4$; þess vegna $\frac{-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = -2 \cdot \frac{1}{10^4} = -\ 0{,}0002$. Svo er þá skakka- eða óvissusvæðið á báðar síður frá 2,2620.

$$\frac{m-p}{2} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = +\ 0{,}00005, \text{ þá efra óvissumark } 2{,}26205$$

$$\frac{-p}{2} = -\ 2 \cdot \frac{1}{10^4} = -\ 0{,}0002, \text{ þá neðra óvissumark } 2{,}2618$$

$$-\qquad +\qquad +$$

$$\frac{m-p-(-p)}{2} = \frac{m}{2} = 2\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = 0{,}00025 = \text{mismunur} = \text{skakkasvæði.}$$

þetta reiknað frá neðsta takmarki óvissusvæðisins til hins efsta. Til að sjá skakka og óvissusvæðið enn betur, er hèr við hliðina sett samlagning með nákvæmari brotum B. Drögum vèr nú brotin í A frá brotunum í B, fást skakkarnir:

$$+\ 0{,}000033 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = 0{,}00005$$

$$-\ 0{,}000033 < -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = -0{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = -\ 0{,}00005$$

$$-\ 0{,}000024 < -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = -0{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = -\ 0{,}00005$$

$$-\ 0{,}000043 < -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = -0{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = -\ 0{,}00005$$

$$-\ 0{,}000029 < -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = -0{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = -\ 0{,}00005.$$

Hèr hefir minna merkið $<$ (23) einungis tillit til talnanna, en

ekki til + og — merkjanna; því annars væri t. d. — 0,000033 $>$ — 0,5, samber (35).

Hinu nákvæma broti 0,5 er hèr slept, þar það hefir alls engan skakka.

þegar summa hinna *negatifu* skakka = — 0,000129 $<$ — 0,0002 er dregin frá hinum *positifa* skakka 0,000033 $<$ 0,00005, þannig:

$$
\begin{array}{rcl}
+\ 0{,}000033 < & 0{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = & 0{,}00005 \\
-\ 0{,}000129 < & -\ 2{,}0 \cdot \frac{1}{10^4} = & -\ 0{,}00020 \\
+ & + & + \\
\hline
0{,}000162 < & 2{,}5 \cdot \frac{1}{10^4} = & 0{,}00025.
\end{array}
$$

þar $<$ hefir einungis tillit til talnanna, þá gildir hèr ekki (42, 3). Hèr er þá skakka eða óvissusvæðið reiknað frá hinu neðsta takmarki þess til hins efsta, og sèst þar af, að hið verulega eða sanna skakkasvæði er minna en óvissusvæðið, því

óvissusvæðið er 0,00025 $= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$

skakkasvæðið er $\underline{0{,}000162}$ =

mismunur þeirra 0,000088.

196. Sè allir skakkarnir (195) samanlagðir, nefnilega $\frac{m-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ upp á við, og $\frac{-p}{2}$ niður á við, í staðinn fyrir að þar voru skakkarnir frádregnir; þá kemur summa allra skakkanna eða skakki summunnar þannig:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{m-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n} & \text{summa } \textit{positifu} \text{ skakkanna.} \\
\frac{-p}{2} \cdot \frac{1}{10^n} & \text{summa } \textit{negatifu} \text{ skakkanna.} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\frac{m-2p}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = \left(\frac{m}{2} - p\right) \cdot \frac{1}{10^n} = \text{skakki summunnar.}$$

Hèr eyða hinir *negatifu* skakkarnir hinum *positifu* eða þessir hinum. þó er hèr við aðgætanda, að allir skakkarnir eru látnir vera $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, en það eru þeir sjaldnast. þessi *formula* segir því skakka summunnar optast of stóran á annanhvorn veginn, ef

notast skal við minni skakka. Summa skakkanna reiknast ekki frá neðsta skakkamarki, heldur frá summunni sjálfri. Til að fá hana útheimtist, að menn viti p, eða hvað mörg af brotunum hafa *negatifan* skakka. Sè engin af brotunum með *negatifum* skakka, þá verður skakki summunnar $=$ skakkasvæðinu $= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Sè engin með *positifum* skakka, þá er hún $\frac{m-2m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, eða hið öfuga skakkasvæði. Sè helmingur brotanna með *negatifum* skakka, þá verður $\frac{m-2 \cdot \frac{1}{2}m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{m-m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = 0$, og þá getur skeð, að summan hafi nokkurn skakka, þó slík skakkasumma segi hann engan vera, því í henni er allsstaðar gjört ráð fyrir hálfrar stafseiningar skökkum. Við þessu er hætt, ef annaðhvort hinir *positifu* eða *negatifu* skakkar eru mjög litlir.

197. Þó öll brotin skakki um hálfa stafseiningu (seinasta stafsins) og þó skakkasvæðið sè aldrei stærra en $\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ (195), þá getur skeð, að það verði annaðhvort *positift* eða *negatift*, þegar það er reiknað frá summu reikningsins, þó það ætíð sè *positift*, þegar það er reiknað frá skakka- eða óvissumarkinu neðra (195). Setjum t. a. m., að öll brotin hafi skakkað niður á við, en ekkert upp á við. Þá verður $p = m$ og skakkinn eptir skakka*formulunni* (196) $= \left(\frac{m}{2} - m\right) . \frac{1}{10^n} = \frac{m-2m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, því þar verður *formulan* (196) gildandi, þar allir skakkarnir eru hálfar stafseiningar. Þetta gefur og að skilja, því þegar allir skakkarnir eru *negatifir* og leggjast saman ásamt tölunum og einingum þeim, sem seinustu stafirnir voru hækkaðir með, þá verður summa skakkanna *negatif* $= -\frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{10^n} = -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, en summa stafseininganna verður $= \frac{m}{10^n}$. En

þessum lið $\frac{m}{10^n}$ má sleppa, því hann er kominn í summuna og felst í henni eptir reglunni að hækka seinasta staflnn. Skakki summunnar verður því $= -\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, eins og skakkasvæðið tekið á *negatifa* veginn. Með sama hætti verður skakki summunnar *positif*, þegar allir skakkarnir eru *positifir* og þá er skakkinn $= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Það má því kalla, að skakkinn leiki milli $+ \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ og $- \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, og svæðið þar á milli má heita leikrúm skakkans eða leikvöllur hans (á dönsku: *Spillerummet for Feilen*), og þetta leikrúm skakkans er þá $= \frac{m}{10^n}$, því

$$
\begin{array}{l}
\quad\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \\
-\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \\
+ \\
\hline
m \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{m}{10^n}.
\end{array}
$$

En þetta hefir í hvert sinn ekki stað, nema ef menn ekki vita *p*, eða hvað mörg af brotunum eru *negatif*. Leikrúm þetta er því mögulegleiki skakkans, en aldrei hans sanna stærð, því það getur aldrei verið altsaman skakki, og engin stærð, sem hefir áreiðanlegan útgangspunkt, getur skakkað í tvær áttir undir eins.

198. Ef brotin, sem eiga að leggjast saman, eru ónákvæm, og hafa misjafnan stafafjölda, og það brot, sem hefir fæsta *decimala*, er ónákvæmt, þá er ekki til neins að taka fleiri *decimala* í hinum brotunum, sem hafa þá fleiri, og þó þau væri nákvæm, því eitt ónákvæmt tugabrot gjörir allan reikning með fleirum *decimölum* ónákvæman; t. a. m. ef eitt brot hefir einungis þrjá *decimala* rètta, er ekki til neins að taka í hinum brotunum fleiri.

199. Sè tvö ónákvæm tugabrot *A* og *B*, og skakkar þeirra α við *A*, og β við *B*, en það skyldi vera óvíst, hvort skakkarnir eru *positifir* eða *negatifir*, þá táknast

hinar nákvæmu tölur með $A \pm \alpha$ og $B \pm \beta$
summa þeirra $A + B \pm \alpha \pm \beta$
mismunur $A - B \pm \alpha \mp \beta$.

Hvað þessa *subtraction* áhrærir, þá er:

$$\begin{array}{r} A \pm \alpha \\ B \pm \beta \\ - \ \mp \quad \\ \hline A - B \pm \alpha \mp \beta, \end{array}$$

vegna þess að merkin í *subtrahendus* breytast í hið gagnstæða. En summa og mismunur hinna ónákvæmu stærða A og B er $A \pm B$.

Skakki þeirra er $\pm \alpha \pm \beta$
eða í hæsta lagi $\alpha + \beta$

bæði við *addition* og *subtraction*. Þar af kemur sú regla, að takmark skakka fleirliðaðrar stærðar er = summu takmarka skakka liðanna.

200. Í tölulið (194) segir, að ef summa af m tugabrotum skal verða áreiðanleg með r tugabrotsstöfum, þá þurfi samleggjendurnir að vera teknir með $n = r + q$ *decimölum,* ef q er stafafjöldi sá, er m skrifast með. Þar er gjört ráð fyrir, að nógir sè *decimalar* og menn ekki hækki seinasta tugabrotsstaf, er þeir taka, þó hinn næsti slepti sè 5 eða meiri. Þegar því skakki summunnar þannig verður $< \frac{1}{10^r}$, þá hlyti hann þó að verða $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^r} = \frac{1}{2 \cdot 10^r}$, eða helmingi minni, ef brotin væri tekin þannig, að hvergi skakkaði meir en um $\frac{1}{2 \cdot 10^n}$. En þar *decimall* ekki breytist við hálfrar stafseiningar skakka, heldur fyrst við heillar, þá má brotanna fjöldi með þessari aðferð vera hálfu meiri, nefnilega $2m$, í staðinn fyrir m, og þess vegna má milli 1 og 20 taka $n = r + 1$, milli 20 og 200 $n = r + 2$ o. s. frv. Þetta má einnig finna þannig: Þegar summa af m tugabrotum, sem ekki skakka nema fram undir $\frac{1}{2}$ einingu hins n^{ta} *decimals,* skal ekki skakka meir en fram undir eina einingu hins r^{ta} *decimals,* þá má ákvarða m þannig:

$$\frac{m}{2 \,.\, 10^n} < \frac{1}{10^r}.$$

Samber (194) um skakkasummuna $\frac{m}{10^n}$, en helmingurinn þar af er $\frac{m}{2 \,.\, 10^n}$. En hèr af leiðist aptur með því að margfalda með $2 \,.\, 10^n$ báðum megin við minna merkið

$$m < \frac{2 \,.\, 10^n}{10^r}.$$

Hèr má stytta brotið hægra megin með 10^r, því 10^r gengur upp í 10^n; kemur þá

$$m < 2 \,.\, 10^{n-r}.$$

Sè nú

$$n - r = 1, \text{ þá er } m < 20$$
$$n - r = 2, \text{ þá er } m < 200$$
$$n - r = 3, \text{ þá er } m < 2000 \text{ o. s. frv.}$$

Hèr er bókstafurinn m notaður nokkuð öðruvísi en í fyrri aðferðinni. Þar merkti m hinn hálfa fjölda brotanna; hèr er m hinn heili fjöldi þeirra.

201. Skuli *subtrahera* ónákvæmt tugabrot frá öðru ónákvæmu, og þau skyldi skakka fram undir $\frac{1}{10^n}$; þá liggur skakki mismunarins milli $\pm \frac{1}{10^n}$, því

$$\begin{array}{r} A + \alpha \\ B + \beta \\ \hline A - B + \alpha - \beta. \end{array}$$

Skakki mismunarins verður mismunur skakka minkanda og frádraga. En α og β eru $< \frac{1}{10^n}$; þess vegna verður mismunur þeirra einnig minni og hvað meira er, minni en hin stærri af tölunum α og β, eptir lögum frádragningar í tölum, því þar er *minuendus* stærstur (25,2). En $\alpha - \beta$ verður *positift* eða *negatift*, eptir því hvort $\alpha > \beta$ eða $\beta > \alpha$. Þess vegna liggur skakki mismunarins milli $\pm \frac{1}{10^n}$.

202. Liggi skakki hinna gefnu tugabrota mili $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, og það er kunnugt um báða skakkana, hvort þeir eru *positifir* eða *negatifir*, þá er:

1. Sè skakkinn í *minuendus positifur,* og í *subtrahendus negatifur,* þá er skakki mismunarins milli 0 og $\frac{1}{10^n}$, því:

$$\begin{array}{c} A + \alpha \\ B - \beta \\ \underline{-\quad +} \\ A - B + \alpha + \beta. \end{array}$$

Hèr er skakki mismunarins $\alpha + \beta$, en

$$\begin{array}{l} \alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \\ \underline{\beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}} \\ \alpha + \beta < \frac{1}{10^n}. \end{array}$$

Það segir, að $\alpha + \beta$ liggi milli 0 og $\frac{1}{10^n}$.

2. Sè skakkinn í *minuendus* þar á mót *negatifur,* en í *subtrahendus positifur,* þá er skakki mismunarins milli 0 og $-\frac{1}{10^n}$, því

$$\begin{array}{c} A - \alpha \\ B + \beta \\ \underline{-\quad -} \\ A - B - (\alpha + \beta). \end{array}$$

Hèr er skakki mismunarins *negatifur,* en

$$\begin{array}{l} \alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} \\ \underline{\beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}} \\ \alpha + \beta < \frac{1}{10^n}. \end{array}$$

Þess vegna skakkinn milli 0 og $-\frac{1}{10^n}$.

3. Sè skakkinn *positif* bæði í *subtrahendus* og *minuendus,* þá er skakkinn í mismuninum milli $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$, því

$$\begin{array}{r} A + \alpha \\ B + \beta \\ - \quad - \\ \hline A - B + \alpha - \beta. \end{array}$$

En í frádragningunni $\alpha - \beta$ er bæði minkandi og frádragi $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$; þess vegna þeirra mismunur einnig $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ (25,2), það er $\alpha - \beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Nú er talan $\alpha - \beta$ *positif* eða *negatif*, eptir því hvort $\alpha > \beta$ eða $\beta > \alpha$; sè $\alpha - \beta$ *positif*, þá liggur sú tala milli 0 og $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$; sè hún *negatif*, þá liggur hún milli 0 og $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$. Þess vegna liggur skakkinn milli $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$.

4. Sè skakkinn *negatifur* bæði í *minuendus* og *subtrahendus*, þá er skakki mismunarins eins og í þriðja tilfelli, því

$$\begin{array}{l} \quad\; A - \alpha \\ \quad\; B - \beta \\ \quad\;\; - \quad + \\ \hline A - B - \alpha + \beta = A - B - (\alpha - \beta). \end{array}$$

Það, sem eptir er af sönnuninni, er öldungis eins og í þriðja tilfelli.

203. Að ákvarða skakkatakmark framkvæmis af ónákvæmum tugabrotum margfölduðum saman, þegar menn vita takmörk fyrir skakka gjörandanna.

Þetta má gjöra með þessum hætti:

$$\begin{array}{l} A + \alpha \\ B + \beta \\ \hline AB + B\alpha + A\beta + \alpha\beta. \end{array}$$

Skakki framkvæmisins er þá:

$$A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

Sè báðir skakkarnir *negatifir*, má, ef vill, hafa forskriptina svona:

$$- A\beta - B\alpha + \alpha\beta.$$

Sè skakkinn í margfaldanda *negatifur*, getur hún verið svona:

$$A\beta - B\alpha - \alpha\beta.$$

Sè skakkinn í margfaldanda *positifur*, en í margfalda *negatifur*, þá svo:

$$-A\beta + B\alpha - \alpha\beta.$$

Í þessum fyrirsögnum má optast sleppa $\alpha\beta$, af því sá liður verður svo lítill, að hans gætir ekki í þessum skakkareikningi. Sè nefnilega $\alpha < \frac{1}{10^p}$ og $\beta < \frac{1}{10^q}$, þá verður framkvæmi þessara brota eða $\alpha\beta < \frac{1}{10^{p+q}}$. Nú má tákna tölurnar, sem margfaldast eiga, þannig:

$$A = a_m \,.\, 10^m + a_{m-1} \,.\, 10^{m-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} \,.\, 10^{-1} + \cdots a_{-p} \,.\, 10^{-p}$$

$$B = b_n \,.\, 10^n + b_{n-1} \,.\, 10^{n-1} + \cdots + b_0 + b_{-1} \,.\, 10^{-1} + \cdots b_{-q} \,.\, 10^{-q}.$$

Hèr merkir a_m hæsta staf margfaldanda í heilu tölunni, og þess vegna m veldisvísi sama stafs fyrir töluna 10, er finst með því að telja frá einingastafnum þangað. a_{-p} er seinasti stafur brotsins, og þess vegna $-p$ tugaveldisvísirinn, sem þar er, svo tölustafurinn, sem þar stendur, er $\frac{a_{-p}}{10^p}$. Með sama hætti er merking stafanna í B.

Til að gjöra þenna skakkareikning auðveldan, hækka menn fyrsta merkjanda staf í A og B um 1, en setja núll fyrir hina stafina. Við þetta koma fram stærri tölur en A og B. Þetta táknast þannig:

$$A < (a_m + 1)10^m$$

$$B < (b_n + 1)10^n.$$

Þetta skal margfalda með takmörkum skakkanna í A og B, nefnilega $\frac{1}{10^p}$ og $\frac{1}{10^q}$; þá verður skakki *productsins* eptir nýsagðri forskript:

$$f < \frac{(a_m + 1)10^m}{10^q} + \frac{(b_n + 1)10^n}{10^p}.$$

Stytta má brot þessi með 10^m og 10^n; kemur:

$$f < \frac{a_m + 1}{10^{q-m}} + \frac{b_n + 1}{10^{p-n}}.$$

Frekari styttingar og hagræði má gjöra sèr, þegar bókstafirnir eru orðnir að ákvörðuðum tölum.

Dæmi: Sè tölurnar, sem eiga að margfaldast saman, þessar:

$$A = 0{,}021923$$
$$B = 1426{,}32145,$$

þá sjáum vèr, að A er gefið í milliónustu pörtum eða með 6 *decimölum*. Skakkans takmark er því $\frac{1}{10^6}$. B er gefið með 5 *decimölum*. Skakkans takmark þar er því $\frac{1}{10^5}$. Þá er:

$$\alpha < \frac{1}{10^6} \quad \beta < \frac{1}{10^5}.$$

Nú förum vèr að taka bókstafina, sem reikningsforskriptin fyrir f krefur. Þá er a_m hinn fyrsti merkjandi stafur í A, og er hann 2 í brotinu (því þar má einnig taka hann, ef heila talan er 0). Þetta eru hundruðustu partarnir; og *exponentinn* við 10 þar er $= -2$, svo $m = -2$. Stafurinn b_n í B er $= 1$, sem er þúsundastafurinn, og er hann hinn þriðji frá einingastafnum. *Exponentinn* við 10 þar er því $+3$, svo að $n = +3$ (hann er *positifur*, þar hann er í heilu tölunni). Bókstafurinn p er 6, sem er hinn áðurfundni *exponent* tölunnar 10 í α, og q $= 5$ sömuleiðis í β. Þá verður eptir forskriptinni:

$$f < \frac{2+1}{10^{5-(-2)}} + \frac{1+1}{10^{6-3}} = \frac{3}{10^7} + \frac{2}{10^3}.$$

Hèr má nú ýmislega aðfara, t. a. m. gjöra brotin $\frac{3}{10^7}$ og $\frac{2}{10^3}$ samnefnd og leggja svo saman. Samnefnd verða þau með því, að margfalda $\frac{2}{10^3}$ í teljara og nefnara með 10^4. Brotin verða þá $\frac{3}{10^7} + \frac{2 \,.\, 10^4}{10^7} = \frac{3}{10^7} + \frac{2 \,.\, 10000}{10^7} = \frac{20003}{10^7} < \frac{100000}{10^7}$ $= \frac{10^5}{10^7} = \frac{1}{10^2}$.

Þetta má einnig gjöra þannig: þar brotið $\frac{2}{10^3}$ hefir margfalt minna nefnara en hitt brotið, þá er það einnig margsinnis stærra, þar ekki er mikill munur á teljurum þeirra. Þar má því sleppa $\frac{3}{10^7}$, en halda einungis $\frac{2}{10^3}$, og setja 10, sem er næsta tuga-

veldi fyrir ofan, fyrir teljara þess, kemur þá $\frac{10}{10^3}$, sem er $> \frac{2}{10^3}$. Hèr við gjörist takmark skakkans hærra og má stytta $\frac{10}{10^3}$ með 10; kemur $\frac{1}{10^2}$. Þessi skakkareikningur er hafður svo ónákvæmur, af því hèr er ekki um annað að gjöra en heil tugaveldi, og er ekki til annars en að vita með hægu móti, hvað marga tölustafi verð er að nota í margföldun ónákvæmra tugabrota, þar ekki verður komizt sannleikanum nær fyrir það, þó þeir sè notaðir allir.

Athugagrein. 1. Í þessum tölulið hefi eg að miklu leyti fylgt herra *Adolph Steen*.

2. Í þessum tölulið er sagt að hækka eigi fyrsta staf í A og B um 1, en setja núll fyrir hina. Skuli heimfæra þetta upp á töludæmið, sem þar er tekið, $A = 0{,}021923$, þá verður $A < 0{,}030000 = 3 \cdot 10^{-2} = \frac{3}{10^2} = \frac{3}{100}$. Sömuleiðis er $B = 1426{,}32145$. Þar af $B < 2000 = 2 \cdot 10^3$. Þetta á svo að margfalda með skakkatakmörkunum $\frac{1}{10^5}$ og $\frac{1}{10^6}$; kemur $f < \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{10^5} + 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{3}{10^7} + \frac{2 \cdot 10^3}{10^6} = \frac{3}{10^7} + \frac{2}{10^3}$ og kemur þetta heim við það, sem síðar er fundið.

204. Hin stytta margföldun. Þar eru einkum tvær orsakir til að menn stytta fyrir sèr margföldunina með hinum löngu, en þó opt ónákvæmu tugabrotum. Sú eina er: að menn ekki þurfa við í það og það skipti að halda á meiri nákvæmni, en fáir tölustafir gefa. Hin önnur er: að reikningurinn með fleirum tugabrotsstöfum gefur ekki nákvæmari úrurð (*Facit*) þó fleiri stafir sè notaðir, en skakkatakmörkin leyfa, sem umtöluð eru í (203). Ýmislegar hafa menn aðferðir til þessa. Sumir umsnúa *multiplicator*, því fyrir eitt kemur, í hvaða röð *partialproductin* eru tekin, þar röð samleggjanda má vera eptir geðþekkni (18). En það má ekki bregðast, að samkynja stèttir standist á í *partialproductunum*, svo þau verði rètt samanlögð eptir samlagningarreglum. Skrifist nú til dæmis hinn umsnúni *multiplicator* þannig

undir *multiplicandus*, að einingastafur *multiplicators* setjist undir þúsundustu partana í *multiplicandus*, og síðan hvert *partialproduct* (sèrframkvæmi) er byrjað með því, að margfalda með hverjum staf í margfalda þann staf í margfaldanda, sem upp yfir honum stendur, þá er hver seinasti stafur í sèrframkvæmunum þúsundustu partar, og eiga því að skrifast hver niður undan öðrum.

Í dæminu (203) var

$$A = 0{,}021923 \quad \alpha < \frac{1}{10^6}$$

$$B = 1426{,}32145 \ \beta < \frac{1}{10^5}.$$

Í þessu dæmi var í (203) skakkatakmark framkvæmisins fundið að vera $\frac{1}{10^2}$; það er því ekki að hugsa til að fá framkvæmið nákvæmara en í hundruðstu pörtum. Hèr tökum vèr A fyrir *multiplicator*, en B fyrir *multiplicandus*. Til að sjá, hvað stafirnir heita í *multiplicator*, eptir hinni almennu nafnagipt (203), setjum vèr hana hèr:

$$\begin{array}{lllllllllllllllll} A = & 0, & 0 & 2 & 1 & 9 & 2 & 3 & = & 0, & 0 & 2 & 1 & 9 & 2 & 3 \\ & & & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & a_{m-4} & & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & a_{-5} & a_{-6} \end{array}$$

því m táknar fjarlægð hins fyrsta merkjanda stafs frá einingastaf, og er hún hèr $= -\ 2$; svo $m = -\ 2$.

Þar enginn merkjandi stafur er fyrr en hundruðustu partarnir í þessari tölu, þá eru þeir látnir heita a_m. Með líkum hætti verður í *multiplicandus:*

$$\begin{array}{llllllllllllllllllll} & B = & 1 & 4 & 2 & 6, & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & = & 1 & 4 & 2 & 6, & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ n = 3 & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & b_{n-5} & b_{n-6} & b_{n-7} & b_{n-8}. & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & b_{-3} & b_{-4} & b_{-5}. \end{array}$$

Þegar nú *multiplicator* A skal skrifast öfugur undir *multiplicandus*, þá er aðgæzluvert, að vita, hvar a_m skal skrifast undir *multiplicandus;* þá gefur reikningsmeistari Ougthtreð þá reglu: fyrst að telja af brotinu í *multiplicandus* svo marga tugabrotsstafi, sem skakkatakmarkið í (203) ákveður, eða færri *decimala*, ef manni nægist með minna; þar næst hugleiða, hvort þversumma þeirra tölustafa, er notaðir verða af *multiplicator*, (vèr köllum hana s), er minni en 10, ellegar $<$ 100, ellegar $<$ 1000, og ef það er, þá undir eins allur *multiplicator*, þá að reikna

sèrframkvæmin með 1 fleiri, ef $s < 10$; 2 fleiri, ef $s < 100$, og 3 fleiri, ef $s < 1000$. Sè hinir notuðu stafir í *multiplicator* ekki allur hann, heldur nokkrir stafir eptirskildir, af því enginn stafur var fyrir ofan í *multiplicandus*, til að margfalda með þeim hluta af margfaldanum, þá ef $s + b_n + 1 < 10$, skal ætla einn staf fyrir skakkanum; því þá er skakkinn $f < \frac{1}{10^{x-1}}$, þegar x er tugabrotsstafafjöldinn, sem hafður er í sèrframkvæmunum. Sè $s + b_n + 1 < 100$, skal ætla 2 stafi fyrir skakkanum, sem þá er $\frac{1}{10^{x-2}}$. Sömuleiðis ef $100 < s + b + 1 < 1000$, skal ætla 3 stafi fyrir skakkanum, sem þá er $f < \frac{1}{10^{x-3}}$. Stærðin x er tugabrotsstafafjöldi, sem *partialproductin* eiga öll að hafa, og sem á að teljast frá kommunni í *B*, og á að innihalda fyrst hinn áreiðanlega stafafjölda, sem skakkatakmarkið (203) segir fáanlegan, og síðan varúðarstafafjöldann, sem s eða $s + b_n + 1$ eptir áðursögðu ákveður. Í stuttu máli: Sè hinn áreiðanlegi stafafjöldi $= c$, og varúðarstafafjöldinn $= v$, þá er

$$c + v = x;$$

c er tekið úr skakkamarkinu $f < \frac{1}{10^c}$ í (203). *V* ákvarðast af s eða $s + b_n + 1$; en x segir til, hvar sá *decimall* í *B* situr, er einingastafurinn í *A* skal skrifast undir; þá telja allir seinustu *decimalarnir* í *partialproductunum* $\frac{1}{10^x}$ parta og standa hver niður undan öðrum, og ef vill niður undan $(x + m)^{ta}$ *decimal* í *B*, eins og hèr er gjört, en mátti fult eins vel skrifa þá undir x^{ta} *decimal* í *B*. Þetta dæmi viljum vèr setja hèr strax:

Skakkatakmark $\frac{1}{10^c} = \frac{1}{10^2}$, þá $c = 2$, $v = 2$, því $s = 17 < 100$.

B =	1426,32145		$x = c + v = 4$
A	32912....	öfugt.	$m = -2$
	28,5264....	1426,32	$x + m = 2;$
	1,4263....	1426,3	a_m sezt því undir
	1,2834....	1426	b_{-2}.
	284....	142	
	42....	14	
	31,2687.		

Multiplicandus

Skakki $< \frac{8}{1,4}$ [illegible] $= 17$

31,2704. þá er $31,2704 > AB > 31,2687$; $AB = 31,27$.

Hér margfaldast þá saman fyrst margfaldaliður og margfaldandanum:

$$a_m \cdot 10^m \times b_{-(x+m)} \cdot 10^{-(x+m)}$$

$$= a_m \cdot 10^m \times \frac{b_{-(x+m)}}{10^{x+m}} = \frac{a_m\, b_{-(x+m)} \cdot 10^m}{10^{x+m}}$$

$$= \frac{a_m\, b_{-(x+m)}}{10^x}$$

það er í dæminu $\frac{a_{-2}\, b_{-2}}{10^4}$

$$\frac{2 \cdot 2}{10^4} = \frac{4}{10^4}.$$

Nú hér kemur nýr skakki í *productið* af skakkanum við hinn notaða hluta af B, sem í dæminu er 1426,32 (því þar er ekki margfaldað, það sem eptir kemur hægra megin, með stafnum í *multiplicator* A, sem er a_m). Skakkinn í B er $\beta_0 < \frac{1}{10^{x+m}}$, [í dæminu $< \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ nefnilega skakkinn við 1426,32;] og hann margfaldast með margfaldaliðnum $a_m\, 10^m$; kemur $\frac{a_m\, 10^m}{10^{x+m}} = \frac{a_m}{10^x}$ [í dæminu $= \frac{a_{-2}}{10^x} = \frac{2}{10^4}$]. (Þetta framkvæma aðrir reikningsmeistarar með því að geyma tugastafi í *productum* margföldunar næsta stafs hægra megin). Síðan er haldið áfram með þetta *partialproduct* eptir venjulegum hætti. Næsta *parti-*

alproduct byrjar með margföldun margfaldaliðar og margfaldandaliðar:

$$a_{m-1} \,.\, 10^{m-1} \times b_{-(x+m-1)} \,.\, 10^{-(x+m-1)}$$
$$= a_{m-1} \,.\, b_{-(x+m-1)} \,.\, 10^{m-1-x-m+1}$$
$$= a_{m-1} \,.\, b_{-(x+m-1)} \,.\, 10^{-x}$$
$$= \frac{a_{m-1} \,.\, b_{-(x+m-1)}}{10^x}$$

Þetta skrifast undir $\frac{1}{10^x}$ partana. Í dæminu er þessi margföldun: $a_{-2-1}\ 10^{-2-1}\ b_{-(4-2-1)} \cdot 10^{-(4-2-1)} = \frac{a_{-3}}{10^3} \cdot \frac{b_{-1}}{10^1}$. $\frac{1}{10^3} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{10^4}$.

Hèr kemur nýr skakki í *productið* af skakkanum í *B,* sem nú er $\beta_1 < \frac{1}{10^{(x+m)-1}}$, og sem margfaldast með margfaldaliðnum $a_{m-1} \,.\, 10^{m-1}$; kemur $\frac{a_{m-1}}{10^x}$. [Skakkinn í dæminu $\beta_1 < \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$, og er það skakkinn við 1426,3; margfaldaliðurinn $a_{m-1} . 10^{m-1} = a_{-3} \,.\, 10^{-3} = \frac{a_{-3}}{10^3}$, og er það í dæminu $\frac{1}{10^3}$, og þegar þetta er margfaldað með skakkanum í *B,* kemur $\frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^4}$]. Þannig er aðfarið með að byrja sèrframkvæmin hægra megin, og halda þeim áfram til vinstri eptir venjulegum hætti, og síðan að ákvarða skakka þeirra:

Byrjunin hægra megin er:

Margfaldaliður $\times$ margfaldandaliður.

Sèrframkvæmaskakkinn er:

Margfaldandaskakki $\times$ margfaldaliður.

Þannig er áframhaldið með *partialproductin* og skakka þeirra, unz kemur til svo lágrar stèttar í *A,* að margföldunin með hæstu stètt í *B* ekki gefur framar neina einingu stèttarinnar $\frac{1}{10^x}$. Hin seinasta margföldun verður:

$$a_{-(x+n)} \,.\, 10^{-(x+n)} \times b_n \,.\, 10^n$$

$$
\begin{array}{lrl}
B = & 1426{,}32145 & \\
A & 32912\cdots & \text{öfugt.} \\
\hline
& 28{,}5264\cdots & 1426{,}32 \\
& 1{,}4263\cdots & 1426{,}3 \\
& 1{,}2834\cdots & 1426 \\
& 284\cdots & 142 \\
& 42\cdots & 14 \\
\hline
& 31{,}2687. &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\ \textit{Multiplicandus}
$$

$x = c + v = 4$
$m = -2$
$x + m = 2;$
a_m sezt því undir b_{-2}.

$$\text{Skakki} < \frac{s}{10^x} = \frac{17}{10^4} = 17$$

$\overline{31{,}2704.}$ þá er $31{,}2704 > AB > 31{,}2687$; $AB = 31{,}27$.

Hèr margfaldast þá saman fyrst margfaldaliður og margfaldandaliður:

$$a_m \,.\, 10^m \times b_{-(x+m)} \,.\, 10^{-(x+m)}$$

$$= a_m \, \frac{10^m \times b_{-(x+m)}}{10^{x+m}} = \frac{a_m \, b_{-(x+m)} \,.\, 10^m}{10^{x+m}}$$

$$= \frac{a_m \, b_{-(x+m)}}{10^x}$$

það er í dæminu $\dfrac{a_{-2} \, b_{-2}}{10^4}$

$$\frac{2 \,.\, 2}{10^4} = \frac{4}{10^4}.$$

En hèr kemur nýr skakki í *productið* af skakkanum við hinn notaða hluta af *B*, sem í dæminu er 1426,32 (því þar er ekki margfaldað, það sem eptir kemur hægra megin, með stafnum í *multiplicator A*, sem er a_m). Skakkinn í B er $\beta_0 < \dfrac{1}{10^{x+m}}$, [í dæminu $< \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$ nefnilega skakkinn við 1426,32;] og hann margfaldast með margfaldaliðnum $a_m 10^m$; kemur $\dfrac{a_m 10^m}{10^{x+m}} = \dfrac{a_m}{10^x}$. [í dæminu $= \dfrac{a_{-2}}{10^x} = \dfrac{2}{10^4}\Big]$. (þetta framkvæma aðrir reikningsmeistarar með því að geyma tugastafi í *productum* margföldunar næsta stafs hægra megin). Síðan er haldið áfram með þetta *partialproduct* eptir venjulegum hætti. Næsta *parti-*

·afnagipt margfaldandaskakkanna. ð inniheldur for- e eru skakkarnir framsettir með tölum. f sömu- að ef *multiplicandus* B, sem er 1426,32145 ma með þúsundastafnum einsömlum, þá væri ·æti verið, alt að þúsundi eða $\beta_5 < 1000$. ·krifað eða aðgætt nema 1426, þá gæti 't fram undir tölunnar einingu. Eins 127,3, þá gæti skakkinn þar verið $\frac{1}{\cdot 0}$. g er hinn umsnúni *mul-* ..ia hans. i sýnir, hvernig sèr- ·t með því að margfalda saman brotin $\frac{1}{10^{-2}} \cdot \frac{3}{10^6} = \frac{1 \cdot 3}{10^{-2+6}} = \frac{3}{10^4}$. k sýnir, .. útkomandi brot fá 10^4 fyrir nefnara, og vísar það á ᵻoa *decimal* í því seinast útkomanda *producti*, og sýnir, að skakkarnir eigi við hann að leggjast, l sýnir, hvernig teljarar skakkanna samanlagðir mynda þversummu *multiplicators* A og sem vèr köllum s.

205. Í þessu undanganganda dæmi var einungis þversumman s höfð til að segja oss, hvort varúðarstafirnir ætti að vera 1 eða 2 (því aldrei kemur það fyrir, að þeir eigi að vera 3, sem væri, ef s eða $s + b_n + 1$ væri milli 100 og 1000). En nú skulum vèr sjá, hvenær $s + b_n + 1$ á að segja til hins sama. Þar til höfum vèr eptirfylgjandi reglu: Gjör fyrst ráð fyrir, að varúðarstafurinn sè einungis 1; tel svo stafina í *multiplicator* frá einingastaf, að honum meðtöldum, til brotsins enda, það er $p+1$ tölustafir eptir *formulunni* fyrir A (203), nefnilega:

$$A = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots a_0 + a_{-1} . 10^{-1} + \cdots a_{-p} 10^{-p},$$

og hygg að, hvort hann (*multiplicator*) muni ná lengra til vinstri en *multiplicandus*; það er meir en yfir $(n + 1) + c + 1$ tölustafi. Nái hann lengra, þá á ekki einungis þversumman s, heldur summan $s + b_n + 1$ að ákvarða, hvort varúðarstafirnir eiga að vera 1 eða 2. Sè þá $s + b_n + 1 < 10$, þá á varúðarstafurinn að vera 1, eins og vèr gjörðum ráð fyrir, og má þá skrifa *multiplicator* þannig, að einingastafur hans standi undir þeim eina varúðarstaf og *multiplicator* nái svo aptur fyrir *multiplicandus*

$$= \frac{a_{-(x+n)}\, b_n}{10^{x+n}\cdot 10^{-n}} = \frac{a_{-(x+n)}\, b_n}{10^x}.$$

þetta er í dæminu

$$\frac{a_{-(4+3)}\, b_3}{10^4} = \frac{a_{-7}\cdot b_3}{10^4} = \frac{0\,.\,1}{10^4}.$$

En þessi margföldun hefir ekki stað í þessu dæmi, þar a_{-7} er ekki til nema 0, og þar upp undan stendur $1 = b_n = b_3$, sem þetta núll á að margfaldast með. Samt á þar að vera margfaldanda skakki, sem er $< \frac{1}{10^{x+m-5}} = \frac{1}{10^{4-2-5}} = \frac{1}{10^{-3}}$ $= 1\,.\,1000$. Margfaldaliðurinn, sem þessi margfaldandaskakki á að margfaldast með, er $\frac{0}{10^7}$; kemur $\frac{1}{10^{-3}}\cdot\frac{0}{10^7} = \frac{1\,.\,0}{10^4} = \frac{0}{10^4}$ $= 0$, svo að sèrframkvæmisskakkinn er hèr $= 0$.

Til þess að sjá, hvernig þversumman *s* fer að myndast úr þessum skakkareikningi, setjum vèr alla skakkana hèr:

a	b_3	b_2	b_1	b_0	b_{-1}	b_{-2}	marg-
b	1	4	2	6,	3	2	faldandi.
c	β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0	
d	$\frac{1}{10^{x+m-5}}$	$\frac{1}{10^{x+m-4}}$	$\frac{1}{10^{x+m-3}}$	$\frac{1}{10^{x+m-2}}$	$\frac{1}{10^{x+m-1}}$	$\frac{1}{10^{x+m}}$	marg-
e	$\frac{1}{10^{-3}}$	$\frac{1}{10^{-2}}$	$\frac{1}{10^{-1}}$	$\frac{1}{10^{0}}$	$\frac{1}{10^{1}}$	$\frac{1}{10^{2}}$	faldanda skakkar.
f	$1\,.\,1000$	$1\,.\,100$	$1\,.\,10$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	
g	0	3	2	9	1	2	marg-
h	$\frac{0}{10^7}$	$\frac{3}{10^6}$	$\frac{2}{10^5}$	$\frac{9}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{2}{10^2}$	falda lið-ir.
i	$\frac{1\,.\,0}{10^{-3+7}}$	$\frac{1\,.\,3}{10^{-2+6}}$	$\frac{1\,.\,2}{10^{-1+5}}$	$\frac{1\,.\,9}{10^{0+4}}$	$\frac{1\,.\,1}{10^{1+3}}$	$\frac{1\,.\,2}{10^{2+2}}$	sèrfram-
k	$\frac{1\,.\,0}{10^4}$	$\frac{1\,.\,3}{10^4}$	$\frac{1\,.\,2}{10^4}$	$\frac{1\,.\,9}{10^4}$	$\frac{1\,.\,1}{10^4}$	$\frac{1\,.\,2}{10^4}$	kvæma skakkar.
l		3 +	2 +	9 +	1 +	2	þversumma $= s$.

Hèr er í línunni a margfaldanda stafirnir með þeirra *indexum*. Í línunni b tölustafirnir sjálfir úr dæminu; þó eru þrír seinustu þeirra eptir skildir, til að spara rúmið, þar þeir eru ekki notaðir.

𝔠 inniheldur nafnagipt margfaldandaskakkanna. 𝔡 inniheldur forskriptir þeirra. 𝔢 eru skakkarnir framsettir með tölum. 𝔣 sömuleiðis. Þar má sjá, að ef *multiplicandus B*, sem er 1426,32145 væri ekki skrifaður nema með þúsundastafnum einsömlum, þá væri skakki þeirrar tölu, eða gæti verið, alt að þúsundi eða $\beta_5 < 1000$. Sömuleiðis, ef ekki væri skrifað eða aðgætt nema 1426, þá gæti skakkinn þar við b_0 verið alt fram undir tölunnar einingu. Eins ef ekki væri athugað nema 1427,3, þá gæti skakkinn þar verið alt fram undir $\frac{1}{10}$, það er $\beta_1 < \frac{1}{10}$. 𝔤 er hinn umsnúni *multiplicator A*. 𝔥 er merking stafa hans. 𝔦 sýnir, hvernig sèrframkvæmaskakkarnir finnast með því að margfalda saman brotin úr 𝔢 og 𝔥, t. a. m. $\frac{1}{10^{-2}} \cdot \frac{3}{10^6} = \frac{1 \cdot 3}{10^{-2+6}} = \frac{3}{10^4}$. 𝔨 sýnir, hvernig hin útkomandi brot fá 10^4 fyrir nefnara, og vísar það á hinn 4ða *decimal* í því seinast útkomanda *producti*, og sýnir, að skakkarnir eigi við hann að leggjast, 𝔩 sýnir, hvernig teljarar skakkanna samanlagðir mynda þversummu *multiplicators A* og sem vèr köllum *s*.

205. Í þessu undanganganda dæmi var einungis þversumman *s* höfð til að segja oss, hvort varúðarstafirnir ætti að vera 1 eða 2 (því aldrei kemur það fyrir, að þeir eigi að vera 3, sem væri, ef *s* eða $s + b_n + 1$ væri milli 100 og 1000). En nú skulum vèr sjá, hvenær $s + b_n + 1$ á að segja til hins sama. Þar til höfum vèr eptirfylgjandi reglu: Gjör fyrst ráð fyrir, að varúðarstafurinn sè einungis 1; tel svo stafina í *multiplicator* frá einingastaf, að honum meðtöldum, til brotsins enda, það er $p + 1$ tölustafir eptir *formulunni* fyrir *A* (203), nefnilega:

$$A = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots a_0 + a_{-1} . 10^{-1} + \cdots a_{-p} 10^{-p},$$

og hygg að, hvort hann (*multiplicator*) muni ná lengra til vinstri en *multiplicandus;* það er meir en yfir $(n + 1) + c + 1$ tölustafi. Nái hann lengra, þá á ekki einungis þversumman *s*, heldur summan $s + b_n + 1$ að ákvarða, hvort varúðarstafirnir eiga að vera 1 eða 2. Sè þá $s + b_n + 1 < 10$, þá á varúðarstafurinn að vera 1, eins og vèr gjörðum ráð fyrir, og má þá skrifa *multiplicator* þannig, að einingastafur hans standi undir þeim eina varúðarstaf og *multiplicator* nái svo aptur fyrir *multiplicandus*

vinstra megin. Sè þar á mót $10 < s + b_n + 1 < 100$, þá eiga varúðarstafirnir að vera tveir. Skal þá færa sig með byrjun stafatalningarinnar undir þenna annan varúðarstaf, og sjá svo, hvort *multiplicator* enn þá nær aptur undan *multiplicandus*. Nái hann það ekki, þá gildir þversumman s einsömul sem skakki, en ekki $s + b_n + 1$, og ræður hún því, eins og áður, hvort varúðarstafirnir skuli vera einn eða tveir. Yfir höfuð: þegar einingastafur *multiplicators* er kominn á rèttan stað, og *multiplicator* þá nær aptur undan *multiplicandus* vinstra megin, þá ræður $s + b_n + 1$, en ekki s einungis. Ellegar s ríkir undir *multiplicandus*, en $s + b_n + 1$ fyrir utan hann. Það er einnig sem optast hægt að sjá það á *multiplicator*, hvort varúðarstafirnir eiga að vera einn eða tveir.

206. Sá hluti af *multiplicator*, sem út undan stendur *multiplicandus*, er

$$\ldots\ldots a_{-(x+n+3)} \cdot 10^{-(x+n+3)} + a_{-(x+n+2)} 10^{-(x+n+2)} + a_{-(x+n+1)} \cdot 10^{-x-n+1}$$

ellegar

$$\ldots\ldots \frac{a_{-(x+n+3)}}{10^{x+n+3}} + \frac{a_{-(x+n+2)}}{10^{x+n+2}} + \frac{a_{-(x+n+1)}}{10^{x+n+1}}.$$

Hann getur ekki margfaldazt með neinum staf í margfaldanda, af því þar standa engir stafir upp undan. *Partialproductin* verða þar því $= 0$. En alt fyrir það hafa þau þó nokkurs konar skakka, og sá skakki ákvarðast eins og aðrir sèrframkvæmaskakkar, nl.

Margfaldandaskakki $\times$ margfaldaliður.

Margfaldandaskakkinn verður hèr allur margfaldandi, og er hann gjörður einfaldari, og aukinn með því að auka hans fyrsta merkjanda staf b_n um 1, þar af kemur $b_n + 1$; en í staðinn fyrir hina stafina setjast núll. Þetta gjörist með því að skrifa 10^n þar aptan við, svo verði $(b_n + 1)\,10^n$, eins og gjört var (205) í *formulunni* fyrir f; er þá auðsætt, að

$$B < (b_n + 1)\ 10^n,$$

sem er margfaldandaskakkinn. Í staðinn fyrir margfaldalið kemur allur sá hluti af *multiplicator*, sem út undan stendur margfaldanda vinstra megin. Er hann þá gjörður einfaldari með því að

taka í staðinn hans einingu næstundangangandi stèttar $\frac{1}{10^{x+n}}$ í hinum öfugt skrifaða *multiplicator*. Því vitanlegt er, að hver stètt verður 10 sinnum minni við hvert sæti, sem hún kemur nær vinstri hendi; svo summan af öllum liðunum, sem þar á eptir koma, verður minni en einingin $\frac{1}{10^{x+n}}$, eins og sjá má af línunni ɥ í (204). Þess vegna verður summa hinna útundanstandandi margfaldaliða $< \frac{1}{10^{x+n}}$. *Productið* verður þá

$$(b_n + 1)\, 10^n \,.\, \frac{1}{10^{x+n}} = \frac{b_n + 1}{10^{-n} . 10^{x+n}} = \frac{b_n + 1}{10^x}.$$

Hèr er þá komið brot, samnefnt þversummunni, sem sýnir, að *products*skakkinn má ekki missa þessa stærð, og á því teljarinn að leggjast við þversummuna; kemur $s + b_n + 1$. Hèr átti nefnilega í aðalframkvæmið að taka öll þau framkvæmi, er hefði stèttina $\frac{1}{10^x}$ lægst, og stærðin $\frac{b_n + 1}{10^x}$ sýnir það með nefnara sínum, að hún er eitt af þeim, eins vel og $\frac{s}{10^x}$.

207. Nú viljum vèr sjá dæmi upp á það, þegar $s + b_n + 1$ á að ráða, en ekki s einsamalt. Vèr tökum sama dæmi sem í (204), en skiptum um gjörendur og setjum $A = 1426,32145$, en $B = 0,021923$, þá er

$B =$	0,021923
$A =$	541236241
	21,9230
	8,7692
	4384
	1314
	63
	4
	31,2687
Alframkvæmis skakkasvæði	21
	31,2708.

Hèr er $c = 2$, $v = 2$, þá $x = 4$, eins og áður. Einingastafur í A er 6, og kemur undir 4ða staf 9 í brotinu í B. Þversumman $1 + 4 + 2 + 6 + 3 + 2 = 18 = s$. Hún tekst ekki lengra en undir $b_n = 2$. Þá standa 541 út undan vinstra megin, $b_n + 1 = 3$, $s + b_n + 1 = 18 + 2 + 1 = 21 =$ Skakkasvæði,

og þar $s + b_n + 1 = 21 > 10$ en < 100, þá er það rètt, að varúðarstafirnir sè tveir. Þegar búið er þannig að skrifa *multiplicator* rètt undir *multiplicandus*, þá stendur eitt sæti í þessu dæmi autt hægra megin í margfaldanda upp yfir 1 í *multiplicator*. Þetta og þvílík auð sæti hægra megin má fylla með núllum. Síðan má kveða þannig að orði: 1 sinni 0 er 0, sem skrifast undir, þar sem menn ætla $\frac{1}{10^x}$tu stèttinni að vera í sèrframkvæmunum. Þar næst: 1 sinni 3 eru 3, skrifa 3. 1 sinni 2 eru 2 o. s. frv., unz komið er alt sèrframkvæmið 21,9230. Síðan er margfaldað með 4 i *A*, og sagt: 4 sinnum 3 er 12, skrifast 2 í hið annað sèrframkvæmi, ekki undir 4, heldur næst hægri í $\frac{1}{10^x}$ stèttar röðina, 1 er geymdur; þá 4 sinnum 2 er 8, og 1 geymdur er 9, er skrifast í annað sèrframkvæmið, og svo er áframhaldið með það, unz það er alt komið, nefnilega 8,7692. Síðan tak 2 (þriðja staf í *multiplicator*), og seg: 2svar 2 (þar fyrir ofan) er 4, skrifast í $\frac{1}{10^x}$ stèttar röðina næst hægri hendi. Þannig er alt af áframhaldið að byrja með að margfalda með hverjum margfaldarastaf, þann staf í margfaldanda, sem upp yfir honum stendur. Og er þetta hinn bezti kostur við þessa aðferð að umsnúa *multiplicator*, að menn vita, hvar byrja skal að margfalda í *multiplicandus*.

Þannig er áframhaldið, unz öll sèrframkvæmin eru fengin. Hið seinasta þeirra er $4 = 2 . 2 = a_{-2} . 10^{-2}$

$$\times\, b_{-2} . 10^{-2} = \frac{a_{-2}}{10^2} . \frac{b_{-2}}{10^2} = \frac{a_{-2}\, b_{-2}}{10^4}.$$

Loksins eru öll sèrframkvæmin lögð saman; kemur alframkvæmið 31,2687. Ekki er nauðsynlegt að leggja þar við 21, því það er raunar ekki skakkinn sjálfur, heldur skakkasvæði; menn láta sèr nægja að burtvarpa varúðarstöfunum 87, en bæta 1 við áreiðanlegu stafina 26, eða rèttara sagt, við þá tvo stafi, er menn ætla sèr að halda, og þá ætla menn til, að 27 verði áreiðanlegir stafir, svo að verði

$$AB = 31,27$$

og $31,2687 < AB < 31,2708$.

208. Nú viljum vèr taka til dæmis tvö af brotunum í (194), nefnilega

$$B = 0,1904 \qquad \beta < \frac{1}{10^4}$$

$$A = 0,1428 \qquad \alpha < \frac{1}{10^4}$$

Nú er eptir (203)

$$f < \frac{a_m + 1}{10^{q-m}} + \frac{b_n + 1}{10^{p-n}}$$

$$a_m = 1;\ b_n = 1 \quad p = 4 \quad q = 4,\ m = -1,\ n = -1.$$

$$f < \frac{1+1}{10^{4+1}} + \frac{1+1}{10^{4+1}} = \frac{2}{10^5} + \frac{2}{10^5} = \frac{4}{10^5} < \frac{10}{10^5} = \frac{1}{10^4}$$

þá $c = 4.\ s = 15 \quad v = 2 \quad x = 4.$

$$\begin{array}{lr}
B = & 0,1904\cdots \\
A & \underline{82410}\ \text{öfugt} \\
 & 19040 \\
 & 7616 \\
 & 380 \\
 & \underline{152} \\
 & 027188 \\
\text{Skakkasvæði} & \underline{15} \\
 & 0,0272|03.
\end{array}$$

Alframkvæmið $= 0,0272$.

Nú var í (194)

$$0,1904 = \tfrac{4}{21} \text{ og } 0,1428 = \tfrac{1}{7}.$$

þá $AB = \frac{4}{21} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{147}$.

$$\begin{array}{l}
147)\ 4,00\ (0,0272108 \\
\quad \underline{294} \\
\quad 1060 \\
\quad \underline{1029} \\
\quad\ \ 310 \\
\quad\ \ \underline{294} \\
\quad\ \ \ 160 \\
\quad\ \ \ \underline{147} \\
\quad\ \ \ 1300 \\
\quad\ \ \ \underline{1176}
\end{array}$$

Þessi samanburður sýnir, að þeir 4 tugabrotsstafir í alfram-

kvæminu eru rèttir, sem skakkamarkið $f < \frac{1}{10^4}$ lofaði, og sem hin stytta margföldun eptir *Ougthtreðs* máta af sèr gaf.

209. Nú viljum vèr skoða eldri aðferð við hina styttu margföldun; þar er ekki viðsnúið *multiplicator*, og kann vera mönnum þyki það stundum viðkunnanlegra að snúa honum ekki við, þar hann af þessum viðsnúningi fær nokkurs konar ókennilegt útlit. þessa aðferð kenna þeir prófessor *Ursin* og *Fallesen*. Vèr tökum til þess dæmið (207).

$$\begin{array}{r} 1426{,}\dot{3}\dot{2}\dot{1}\dot{4}5 \\ 0{,}021923 \\ \hline 28{,}5264290 \\ 1{,}4263215 \\ 1{,}2836893 \\ 285264 \\ 42790 \\ \hline 31{,}2692452. \end{array}$$

Hèr er fyrst margfaldað með fyrsta merkjanda staf margfalda 2, og þar með er margfaldaður allur *multiplicandus* (eða að eins meiri hluti hans, ef vill, með því að skilja eptir eitthvað af honum hægra megin). Hèr tökum vèr hann allan. þegar búið er að margfalda með 2, er settur punktur yfir 5, til að minna sig á, að margfalda ekki 5 með næsta staf nema til að fá geymdan tugastaf þaðan. því næst er margfaldað með næsta staf margfalda 1, og sagt: 1 sinni 5 er 5, og af því 5 er fremur stór stafur, má álíta hann sem 1 tugur væri, og geyma 1. Síðan segja: 1 sinni 4 er 4, og 1 geymdur er 5. þessir 5 skrifast undir 0 í fyrsta sèrframkvæmi. Síðan margfaldast það, sem eptir er af *multiplicandus*, með 1, og sezt punktur yfir 4. Síðan er farið að margfalda með 1, og sezt punktur yfir 4. Síðan er farið að margfalda með 9, og sagt: 9 sinnum 4 er 36, það láta menn heita 40 (af því 6 er stór stafur) og geyma 4. Segja svo: 9 sinnum 1 er 9 og 4 geymdir er 13; skrifa 3 í sèrframkvæmið hægra megin, og halda svo áfram með það eptir venjulegum hætti, og setja punkt yfir 1. Síðan taka 2 í *multiplicator* og segja: 2svar 1 gefur ekkert geymt; 2svar 2 er 4, skrifast 4 næst hægri í sèrframkvæmið, o. s. frv. Sezt punktur yfir 2. Seinast tökum vèr 3 í *multiplicator*, og segjum: 3svar 2 er 6; það er

stór stafur, og látum vèr það heita 10, og geymum 1. 3svar 3 eru 9, og 1 geymdur er 10, skrifa 0 í *partialproductið* seinasta hægra megin, geymist 1. 3svar 6 er 18, og 1 geymdur er 19, skrifa 9, geymi 1, o. s. frv.

Þessi aðferð að merkja stafina með punkti eða öðru merki, kann að ruglast fyrir manni. En þá er önnur aðferð betri eða áreiðanlegri, og byggist hún á því, að tugabrotsstafir í *producti* eru eins margir sem í gjöröndunum til samans (168). Þá er góður leiðarvísir í því, að hafa tölu á *decimölunum* í sèrframkvæmunum, því hún heldur sèr eða breytist ekki í sama dæminu. Þegar eg því í þessu dæmi margfalda með hundruðustu pörtunum 2 í *multiplicator,* þá er það hinn annar stafur í broti margfaldara, og með honum eiga að margfaldast 5 *decimalar* í *multiplicandus,* þá sè eg, að $2 + 5 = 7$; það er því talan 7, sem eg í þessu dæmi á að hafa gætur á. Þess vegna, þegar eg vil margfalda með 9 í *multiplicator,* þá sè eg, að það er hinn 4ði stafur brotsins; en þá er $4 + 3 = 7$. Eg á því að byrja á 3ja staf í margfaldanda nl. 1, þegar eg vil margfalda með 9, (að fráteknu því, að eg margfalda næsta staf hægra megin til að fá hið geymda). Eins þegar eg skal margfalda með 2 (hinum 5ta staf í broti *multiplicators*), þá sè eg, að eg á að byrja á öðrum staf í *multiplicandus,* því $5 + 2$ er 7. Í stuttu máli: eg á að byrja *multiplicationina* á því sæti í *multiplicandus,* sem fyllir 7. Viljir þú hafa þessa reglu framsetta í bókstöfum, þá sè p tala þeirra *decimala,* sem *partialproductin* hafa, og þú vilt margfalda með hinum $m$ta *decimal* í *multiplicator,* þá átt þú að byrja margföldunina á hinum $n$ta *decimal* í *multiplicandus,* en margfalda þó hinn $(n + 1)$ta þar, til að fá geymdan tugastaf, og þá á að vera:

$$m + n = p.$$

Þessa reglu er hægt að heimfæra upp á framanskrifað dæmi í þessum tölulið. Það er annars einnig gott að framsetja þessa reglu sem *subtraction,* þannig:

$$n = p - m.$$

Hvað áreiðanlegu stafina í *productinu* snertir, þá eru þeir tveir, eins og áður, og 1 bætist við 6, þar stóri stafurinn 9 kemur á eptir, svo *productið* verður 31,27. Þetta dæmi mátti og vel reiknast með 4 *decimölum,* nefnilega $c = 2$ og $v = 2$, þannig:

1426,32145	
0,021923	
28,5264	
1,4263	
1,2837	
285	
43	
31,2692.	

Hèr er alt af $p = 4$. Þegar margfalda skal með 0,02, þá er $4 - 2 = 2$; þá er 1426,32 *multiplicandus*, að fráreiknuðum geymslustafnum 1. Þegar skal margfalda með 0,001, þá er $4 - 3 = 1$, og er þá 1426,3 *multiplicandus*, og geymslustafur 2. Þegar margfalda skal með 0,0009, þá er $4 - 4 = 0$; þá er 1426 *multiplicandus*, og 3 geymslustafur. Þegar margfalda skal með 0,00002, þá er $4 - 5 = -1$; þá er 142 *multiplicandus*, og 6 geymslustafur. Þegar loksins margfalda skal með 0,000003, þá er $4 - 6 = -2$; þá er 14 *multiplicandus*, og 2 geymslustafur. Hèr hefi eg kallað geymslustaf þann staf, sem á að margfalda einungis til að fá tugastaf geymdan. Í þessu verða ætíð c og v eins og áður er sagt, og v aldrei meir en tveir stafir, og aldrei minna en 1 stafur. Þegar heil tala er í *multiplicator*, þá verður m *negatif* tala, t. d.

0,021923		
1426,32145		$p - m = n$
21,9230	1 *mult.*	$4 - (-3) = 7$, *prod.* 0
8,7692	4 *mult.*	$4 - (-2) = 6$, *prod.* 2
4385	2 *mult.*	$4 - (-1) = 5$, *prod.* 5
1315	6 *mult.*	$4 - 0 = 4$, *prod.* 5
66	3 *mult.*	$4 - 1 = 3$, *prod.* 6
4	2 *mult.*	$4 - 2 = 2$, *prod.* 4.
31,2692.		

Hèr er settur punktur aptan við *multiplicandus*, af því n heimtar 7 *decimala*. Stafirnir í heilu tölu *multiplicators* verða að álítast sem *negatifir decimalar*.

210. Að ákvarða takmark nákvæmninnar í deilingu ónákvæmra tugabrota. Skuli deila M með N, og skakkinn við M skyldi vera $\pm\alpha$ og við N vera $\pm\beta$, þannig að takmörkin verði $M \pm \alpha$ og $N \pm \beta$, þá fæst hinn stærsti kvóti af deilingunni $\frac{M+\alpha}{N-\beta}$, og hinn minsti kvóti af $\frac{M-\alpha}{N+\beta}$ (58,3). Mismunurinn hèr á milli eða

$$\frac{M+\alpha}{N-\beta} - \frac{M-\alpha}{N+\beta} = \frac{2(M\beta + N\alpha)}{N^2 - \beta^2}$$

er takmark nákvæmninnar, sem fæst við deilingu ónákvæmra tugabrota.

Þegar brotið $\frac{M+\alpha}{N-\beta}$ margfaldast í teljara og nefnara með nefnara hins brotsins $N+\beta$, þá kemur

$$\frac{MN + N\alpha + M\beta + \alpha\beta}{N^2 - \beta^2}.$$

En þegar hitt brotið $\frac{M-\alpha}{N+\beta}$ margfaldast í teljara og nefnara með $N - \beta$, kemur

$$\frac{MN - N\alpha - M\beta + \alpha\beta}{N^2 - \beta^2}.$$

Þegar teljari hins síðara þessara samnefndu brota er dreginn frá teljara hins fyrra, kemur teljari mismunarins, og þegar þar er undirskrifaður samnefnarinn, kemur:

$$\frac{2(M\beta + N\alpha)}{N^2 - \beta^2}.$$

Þessi stærð ákvarðar hina mestu nákvæmni, er tveggja stærða kvóti náð getur. Lendi þessi mismunur milli $\frac{1}{10^n}$ og $\frac{1}{10^{n+1}}$, verður kvótinn ekki fenginn nákvæmari en til einnar einingar $\frac{1}{10^n}$-tu stéttar. Sè mismunur þessi látinn vera tugabrot, verður það að hafa $n+1$ núll framan við sig, hið eina á undan kommunni og n á eptir henni. Ellegar ef $\frac{M+\alpha}{N-\beta}$ og $\frac{M-\alpha}{N+\beta}$ reiknast hvort sèr í lagi, þá hafa þessar stærðir hina sömu tölustafi sameiginlega, bæði þá, sem eru fyrir framan kommuna og líka n tölustafi á eptir kommunni, og mismuna fyrst í $(n+1)$ta tölustaf.

211. Dæmi. Vèr viljum finna takmark nákvæmninnar í þessari deilingu:

$$M = 9{,}80896. \qquad \alpha < \frac{1}{10^5}$$

$$N = 9{,}8696044. \qquad \beta < \frac{1}{10^7}$$

Vèr höfum hèr til *formuluna* í (210), nefnilega:

$$\frac{2(M\beta + N\alpha)}{N^2 - \beta^2}.$$

Hèr má skoða $M = 9,80896$ sem $(a_m + 1)10^m$, þegar $m = 0$, $a_m = 9$, og þá verður $9,80896 < 10$, og má setja 10 fyrir það í *formulunni*. Eins má fara með $N = 9,8696044$, og má kalla það $(b_n + 1)10^n$ og verður það einnig 10. Það er og bersýnilegt, að báðar tölurnar eru nærri 10. Þá verður:

$$\frac{2\left(\frac{10}{10^7} + \frac{10}{10^5}\right)}{10^2 - \frac{1}{10^{14}}} = \frac{2\left(\frac{10}{10^7} + \frac{10^3}{10^7}\right)}{10^2} = 2\left(\frac{10 + 10^3}{10^9}\right) =$$

$2\frac{10^3}{10^9} = 2 \cdot \frac{1}{10^6}$. Þetta liggur á milli $\frac{1}{10^5}$ og $\frac{1}{10^6}$, og deilingin getur verið nákvæm með 5 tugabrotsstöfum. Hèr mátti kasta burt $\frac{1}{10^{14}}$ í samburði við 10^2; einnig 10 móts við 10^3.

Þetta má einnig skoða þannig: M og N má láta vera 10, eins og áður er sagt, þar hvort fyrir sig er svo nálægt því. Þá verður:

$$10 \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{10}{10^7} = \frac{1}{10^6} = 0,000001$$

$$10 \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{10}{10^5} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$$

$$\overline{0,000101}$$

$$N^2 = 100)\overline{0,000202}(2$$

$$\overline{0,00000202.}$$

Þetta 0,00000202 er meira en $\frac{1}{10^6}$ og minna en $\frac{1}{10^5}$, eins og áður er fundið.

2að dæmi: $M = 10,926954 \qquad \alpha < \frac{1}{10^6}$

$N = 0,3547808 \qquad \beta < \frac{1}{10^7}$

$\left.\begin{array}{l} M = 11 \\ N = 0,4 \end{array}\right\}$ nærfelt $11 \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{11}{10^7}$ $0,4 \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{0,4}{10^6} = \frac{4}{10^7}$

þá $\frac{11}{10^7} + \frac{4}{10^7} = \frac{15}{10^7}$. $2 \cdot \frac{15}{10^7} = \frac{30}{10^7} = \frac{3 \cdot 10}{10^7} = \frac{3}{10^6}$

þá $\frac{3}{10^6} : (0,4)^2 = \frac{3}{10^6} : 0,16 = \frac{3}{10^6} : \frac{16}{10^2} = \frac{3}{10^6} \times \frac{10^2}{16}$

$= \frac{3}{10^4 . 16}$.

þá 160000) 3,00000 (0,000019
160000
1400000
1440000.

þá takmark nákvæmninnar 0,00002 eða milli $\frac{1}{10^4}$ og $\frac{1}{10^5}$.

Sama dæmi öðruvísi:

M og N eins og áður. $\alpha = 0{,}0000005$, $\beta = 0{,}00000005$.

$M\beta = 0{,}00000055$

$N\alpha = 0{,}00000020$

$0{,}00000075$

0,16) $0{,}00000150$ (2 $N^2 = 0{,}16$

$\frac{150}{16} = 9\frac{3}{8}$, og þegar komma er sett, 0,000009 eða 0,000010.

Nákvæmni nærfelt 5 tugabrotsstafir.

Hèr eru skakkarnir α og β látnir vera hálfu minni í seinni aðferðinni, en í hinni fyrri, því $0{,}0000005 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$ og $0{,}00000005 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}$. Í fyrri aðferðinni er gjört ráð fyrir, að skakkinn við M sè fram undir 1 einingu hins sjötta *decimals*, ɔ: $\frac{1}{10^6}$, og að sá, sem brotið $M = 10{,}926954$ er fengið frá, ekki hafi haft þá reglu, að auka seinasta staf, ef hinn fyrsti slepti var stór. Sama er að segja um N og β. Hin síðari aðferðin er hèr því betur stofnuð en hin fyrri. Þó hefði hin fyrri eins vel mátt notast með því, að setja skakkana $\alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$ og $\beta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7}$. Þá er $M\beta = 11 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^7} = \frac{11}{2 \cdot 10^7}$. $N\alpha = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{0{,}4}{2 \cdot 10^6} = \frac{4}{2 \cdot 10^7}$. Þá $M\beta + N\alpha = \frac{15}{2 \cdot 10^7}$. Þetta tvöfaldað $= \frac{15}{10^7}$. Þá $\frac{15}{10^7} : 0{,}16 = \frac{15}{10^7} : \frac{16}{10^2} = \frac{15}{10^7} \times \frac{10^2}{16} = \frac{15}{10^5 \cdot 16}$. Álítist nú $15 = 16$, þá er nákvæmnin $= \frac{1}{10^5}$, eins og með síðari aðferðinni.

Vilji menn, eins og í (210) var áminnzt, reikna hvort brotið sèr

í lagi $\frac{M+\alpha}{N-\beta}$ og $\frac{M-\alpha}{N+\beta}$, þá er það langtum fyrirhafnarmeira. Þó viljum vèr skoða það hèr. Þá er

$$\frac{M+\alpha}{N-\beta}=\frac{10{,}9269545}{0{,}35478075}.\quad \frac{M-\alpha}{N+\beta}=\frac{10{,}9269535}{0{,}35478085}.$$

Hið fyrra brot:

```
0,35478075) 10,92695450 (30,799175
            10,6434225
               283532000
               248346525
                351854750
                319302675
                 325520750
                 319302675
                   62180750
                   35478075
                  267026750
                  248346525
                   186802250
                   177390375
                     9411875.
```

Hið síðara brot:

```
0,35478085) 10,92695350 (30,799163
            10 6434255
               283528000
               248346595
                351814050
                319302765
                 325112850
                 319302765
                   58100850
                   35478085
                  226227650
                  212868510
                   133591400
                   106434255
                    27157145.
```

Þegar hinn síðari kvóti er dreginn frá hinum fyrra

$$\begin{array}{r} 30,799175 \\ \underline{30,799163} \\ 0,000012, \end{array}$$

kemur mismunur, er segir að eins 4 *decimala* vera áreiðanlega í stað þess, að þegar bæði brotin voru reiknuð í einu lagi, sýndist koma fram 5 *decimala* nákvæmni. Þegar brotin voru reiknuð í einu lagi, fèkk eg út $\frac{15}{10^5 \, . \, 16}$, og tók mèr það leyfi, að láta 15 vera $=$ 16, og þá kom út $\frac{1}{10^5}$. Taki eg mèr ekki það leyfi, þá margfalda eg saman $10^5 . 16$, og deili 15 þar með, þannig:

$$\begin{array}{rl} 1600000) & 15,000000 \;(0,0000093 \\ & \underline{14400000} \\ & \;\;\;6000000 \\ & \;\;\;\underline{4800000} \end{array}$$

Þá fæst að sönnu eins 5 *decimala* nákvæmni, eins og þegar þetta leyfi var tekið, en þó svo, að kvótastafurinn 9 má ekki stærri vera, því þá kemur fram 4ra *decimala* nákvæmnin, eins og þegar brotin voru reiknuð í tvennu lagi, og þegar fèkst 0,000012. Dragi eg nú þannig frá:

$$\begin{array}{ll} 0,000012, & \text{ef brotin eru í tvennu lagi,} \\ \underline{0,0000093,} & \text{ef brotin eru í einu lagi,} \\ 0,0000027 & \text{ágreiningur.} \end{array}$$

Um 0,000012 er það að segja, að tölurnar eru þar alls ekkert aflagaðar, og þess vegna virðist sá reikningur að vera rèttur, þó hann sè erfiðari. Um 0,0000093 er þar á mót það að segja, að M og N eru nokkuð aflagaðar, þar 10,926954 er til hægðar látið vera 11, og 0,3547808 $=$ 0, 4. Vèr viljum nú reyna að ganga tölunum nokkuð nær, og láta M vera 10,93 og $N = 0,35$; þá verður

$$10,93 \, . \, \frac{1}{2} \, . \, \frac{1}{10^7} = \frac{10,93}{2 \, . \, 10^7} = \frac{1093}{2 \, . \, 10^9}$$

$$0,35 \, . \, \frac{1}{2} \, . \, \frac{1}{10^6} = \frac{0,35}{2 \, . \, 10^6} = \frac{35}{2 \, . \, 10^8} = \frac{350}{2 . 10^9}. \quad \text{Summa} = \frac{1443}{2 . 10^9}.$$

Hún tvöfölduð $= \frac{1443}{10^9}$.

Þá $\frac{1443}{10^9} \times \frac{10^4}{1225} = \frac{1443}{10^5 . 1225}$, því $(0,35)^2 = 0,1225 = \frac{1225}{10^4}$.

þá 122500000) 1443,00000 (0,000012, heldur stór kvóti
122500000
218000000
245000000
— 27000000.

Hèr er kominn kvóti, sem að mestu leyti er samhljóða hinum rètta, af því tölurnar eru hèr mjög lítið aflagaðar.

þessa *formulu* fyrir skakkasvæði kvótans hefir professor Ramus framsett í sinni *Elementære Algebra.* Í næsta töluliö viljum vèr skoða aðra, er *Fallesen* og *Steen* kenna í sínum lærdómsbókum.

212. þegar ónákvæm tugabrot A og B skulu deilast, verður skakkinn:

$$f = \frac{A}{B} - \frac{A \pm \alpha}{B \pm \beta} = \frac{A(B \pm \beta) - B(A \pm \alpha)}{B(B \pm \beta)}.$$

Sè brotin gjörð samnefnd, og hið síðara dregið frá hinu fyrra, þá er eptir efri merkjunum:

$$f < \frac{A\beta - B\alpha}{B^2 + B\beta}.$$

Sè nú í þessu α *negatift* $= -\alpha'$ (ɔ: *dividendus* of stór), og β *negatift*, $= -\beta'$ (ɔ: *divisor* einnig of stór), kemur

$$f' < \frac{A\beta' + B\alpha'}{B^2 - B\beta'}.$$

Sè nú í aðal*formulunni* tekið í teljaranum efra merkið, ɔ: *dividendus* of lítill, og í *divisor* neðra merkið, ɔ: *divisor* of stór, kemur:

$$f < \frac{A\beta + B\alpha}{B(B - \beta)}.$$

þá verður skakkinn mestur, því teljarinn í þessu broti, er ákvarðar skakkann, stækkar við það, og þess vegna skakkinn. þar á ofan minkar nefnarinn skakkabrotsins, og skakkinn stækkar einnig við það.

þegar a_m er látið merkja hinn fyrsta merkjanda staf í A, og sömuleiðis b_n hinn fyrsta merkjanda staf í B, eins og í (203), þá má setja

$$A < (a_m + 1) . 10^m;\ b_n . 10^n < B < (b_n + 1) . 10^n$$
$$\alpha < \frac{1}{10^p},\ \beta < \frac{1}{10^q}.$$

þá fær skakka*formulan* þetta útlit:

$$f < \frac{(a_m + 1) \cdot 10^{m-q} + (b_n + 1) \cdot 10^{n-p}}{b_n \cdot 10^n \left(b_n \cdot 10^n - \frac{1}{10^q}\right)}.$$

Dæmi sama sem hið fyrra í (211):

$$A = 9{,}80896 \qquad \alpha < \frac{1}{10^5}$$

$$B = 9{,}8696044 \quad \beta < \frac{1}{10^7}$$

$m = 0$, $n = 0$, $a_m = a_0 = 9$, $b_n = b_0 = 9$; $a_m + 1 = 10$, $b_n + 1 = 10$, $p = 5$, $q = 7$. Þá er

$$f < \frac{10 \cdot 10^{-7} + 10 \cdot 10^{-5}}{9 \cdot 10^0 \left(9 \cdot 10^0 - \frac{1}{10^7}\right)} = \frac{10^{-6} + 10^{-4}}{9(9-0)} = \frac{10^{-6} + 10^{-4}}{81}$$

$$= \frac{10^{-6}}{81} + \frac{10^{-4}}{81} = \frac{1}{10^6 . 81} + \frac{1}{10^4 . 81} = \frac{1}{10^6 . 81} + \frac{10^2}{10^6 . 81}$$

$$= \frac{10^2}{10^6 . 81} = \frac{1}{10^4 . 81} = \frac{1}{10^4 . 10 . 8} = \frac{1}{10^5 . 8}.$$

Þess vegna $f < \frac{1}{10^5}$, því það er áttundi parturinn þar úr, þó hèr um bil, vegna þeirra aflagana, sem áður er búið að gjöra á tölunum.

213. Þegar tvær heilar tölur eru gefnar, þá að deila hinni stærri með hinni minni, og kvótinn skal ákvarðast í heilu með einnar einingar nákvæmni, og þar til skal hafa stytta deilingu. Undirbúningur úrlausnar.

Sú aðferð styttrar deilingar, sem hèr verður sýnd, er eignuð *Guy*.

Hið fyrsta, sem þar er að gjöra, er að ákvarða stafatölu kvótans. Þetta má gjöra þannig: Drag stafafjölda deilis frá stafafjölda deilanda, og set mismuninn $= d$, þá er stafafjöldi kvótans

annaðhvort	ellegar
$n = d + 1$	$n = d$
ef fyrstu stafir deilis verða hafðir í jafnmörgum fyrstu stöfum deilanda.	ef fyrstu stafir deilis ekki verða hafðir í jafnmörgum fyrstu stöfum deilanda.

Þegar fyrstu stafir deilis ekki verða hafðir í jafnmörgum fyrstu stöfum deilanda, þá fækka kvótastafirnir um 1, verður svo: $n = d + 1 - 1 = d$.

Dæmi upp á $n = d + 1$:

$$\frac{6879459}{59786.}$$

Hèr er $d = 2$, og fyrsti stafur deilis 5 verður hafður í fyrsta staf deilanda 6, svo fyrsti sèrdeilandi verður 68794; en við þriðju deilingu verður búið að vinna upp allan *dividendus*, þannig:

```
59786) 6879459 (115
       59786..
       -------
        90085
        59786          þetta tákna eg: (6/5).
        ------
        302999
        298930
        ------
          4069.
```

þetta má stuttlega sjá svo:

```
6879459
59786..
    1,2,3
```

Svo $n = d + 1 = 2 + 1 = 3$.

Dæmi upp á $n = d$ er þetta:

$$\frac{659786510127}{735406.}$$

Hèr er $d=6$, og fyrsti stafur deilis 7 verður ekki hafður í fyrsta staf deilanda 6, það verður því að hafa 7 í 65, og má skoða þetta svo:

```
6 5 9 7 8 6 5 1 0 1 2 7
  7 3 5 4 0 6 . . . . .      Tákna eg (6 5/7).
              1,2,3,4,5,6.
```

Og eptir 6 deilingar verður búið að vinna upp *dividendus*, svo $n=d=6$.

214. Hin stytta deiling við heilar tölur með einnar einingar nákvæmni.

Tölustafanna fjöldi í kvótanum ákvarðast fyrst; hann skal heita y. Vinstra megin í *divisor* markast með einhverju merki, svo sem stryki fyrir ofan, einn eða fleiri stafir, svo margir, að tala sú, sem þeir tákna, sè jöfn eða meiri en $2y'$. 0,9. Sè nú fjöldi þeirra stafa, sem á eptir koma í *divisor*, minni en $y-1$, eða jöfn því, þá byrjar ekki hin stytta margföldun strax; heldur deilist eptir venjulegum hætti, unz hinir vantandi kvótastafir y'

eru orðnir að eins svo margir, að þegar hinir að nýju afmörkuðu stafir framan af *divisor* tákna tölu jafnstóra eða stærri en $2y'$. 0,9, og þá verði hinir ómerktu stafir í *divisor* fleiri en $y'-1$, þá afskerast þeir stafir aptan af *divisor,* sem fram yfir eru $y'-1$. Hinn eptirverandi hluti *divisors* ásamt mörkuðu stöfunum vinstra megin kallast þá hinn fyrsti *divisor.* En hinir merktu stafir vinstra megin heita hinn síðasti *divisor.* Af *dividendus* burtskerast hægra megin eins margir stafir, sem hinn upphaflegi *divisor* hafði eptir hina merktu stafi; og það, sem þá er eptir af *dividendus,* myndar hinn fyrsta *dividendus.* þessi talning *divisora* og *dividenda* reiknast einungis frá því er hin stytta deiling byrjar, en ekki frá upphafi hinnar óstyttu deilingar. Nú deila menn hinum fyrsta *dividendus* með hinum fyrsta *divisor,* og þá fæst hinn fyrsti stafur kvótans y', en ekki y, og kalla eg þenna kvótastaf x. Með honum margfaldast hinn fyrsti *divisor,* en þar við bætist geymd tala frá margföldun hins næsta afskorna deilistafs hægra megin. Framkvæmi þetta með geymdu tölunni *subtraherast* frá fyrsta *dividendus,* og afgangurinn heitir annar *dividendus.* Nú skal skera nýjan staf af *divisor* hægra megin; þá er það, sem eptir er af honum, hinn annar *divisor.* Með honum deilist hinn annar *dividendus*, fæst þá hinn annar kvótastafur x_2 hinnar styttu deilingar. Með þessum staf margfaldast hinn annar *divisor,* og bætist þar við framkvæmið geymd tala frá margföldun hins seinasta afskorna deilistafs. Hið útkomanda *subtraherast* frá hinum öðrum *dividendus.* þannig er áfram haldið með því að afskera við hverja deilingu nýjan staf af *divisor.* Loksins er deilt með hinum síðasta *divisor.* þar á eptir er að gæta að, hvort hinn upphaflegi *divisor* er minni en tala sú, er framkemur, þegar hægra megin til hinna seinustu leifa eru niðurfluttir hinir afskornu stafir af *dividendus*; og ef svo er, þá skal bæta 1 við hinn fundna kvóta. Annars skal hann látinn óbreyttur.

Merk: þessar reglur hefi eg skrifað nærri orðrétt eptir *Ramus,* og dæmi hans ætla eg líka að nota, en meðfara þó á fleiri vegu.

215. þetta í (214) umtalaða *Ramusar* dæmi er 659786510127 : 735406; það á eptir (213) að hafa 6 kvótatafi, svo y er $= 6$.

$\overline{73}540(6))\ 65978651(0127)\ (897173$
$\underline{5883248.}$
$\underline{7146171}$
$\underline{6618654}$
527517 fyrsti *dividendus*, en 73540 fyrsti *divisor*.
$\underline{514784}$
12733 annar *dividendus*, en 7354 annar *divisor*.
$\underline{7354}$
5379 þriðji *dividendus*, en 735 þriðji *divisor*.
$\underline{5147}$
232 seinasti *dividendus*, en $\overline{73}$ seinasti *divisor*.
$\underline{220}$
$735406 > 120127.$

Nú reynum vèr, hvort þetta $y = 6$ getur verið y'; eptir forskriptinni $2y' . 0{,}9 = 12 . 0{,}9 = 10{,}8$. En 7, sem er fyrsti stafur deilis, er $< 10{,}8$; þá verður að taka 2 fyrstu stafi deilis 73, og á svo að setja strykið yfir þá tvo stafi, en þó ekki strax; því nú verður einnig að gæta stafafjöldans, sem eptir er í *divisor*, sem er 4, en $y' - 1$ er 5. Þá á ekki hin stytta deiling að byrja strax, heldur á að deila eptir venjulegum hætti. Kvótastafurinn er 8, og með honum margfaldast allur *divisor* og dregst frá *dividendus*, eins og venjulegt er; og næsti stafur deilanda færist ofan til leifarinnar. Nú eru þá eptir 5 stafir ófengnir í kvótann. Þessa 5 setja menn nú í forskriptina $2y . 0{,}9$; verður 9,0, sem er meira en fyrsti stafur deilis, en strykið á að afmarka svo marga stafi, að talan, sem þeir tákna, sè $> 2y . 0{,}9$. Hèr verður því, eins og áður, að afmarka 73. Nú þar 5 (ɔ: hinir ófengnu stafir kvótans) eru fleiri en 4 (ɔ: ómarkaðir stafir *divisors*), en þessir eiga að vera fleiri en $y' - 1$, ef stytta deilingin á að byrja, þá á enn að viðhafa óstytta deilingu; því hèr eru tölurnar að eins jafnar, nefnilega $4 = 5 - 1$. Vèr deilum þá með öllum *divisor* 735406, tölunni 7146171 og fáum kvótastaf 9. Vèr margföldum með honum, drögum frá sèrdeilanda og fáum leifina 527517 eptir venjulegum hætti. Hafa má reikningsforskript til að sjá í hvert skipti, hvort nema skal af deili eða ei. Setjum, að tala hinna eptirverandi stafa af deili sè $= e$, og hinna vantandi stafa kvótans $= v$, þá ef:

$$e \leqq v - 1 \cdots \alpha,$$

þá skal ekki neinn staf nema af deili. En sè

$$e > v - 1 \cdots \beta,$$

þá skal nema staf aptan af deili. Hingað til höfum vèr haft tilfellin α, og þess vegna er ekki enn byrjuð stytta deilingin. En sjáum vèr nú, hvernig á stendur: $e = 4$, og $v = 4$, því vèr höfum nú 4 kvótastafi ófengna, þá

$$4 > 4 - 1 = 3.$$

þetta bendir oss á skilmálann β, þar fyrir byrjar nú hin stytta deiling. þess vegna skal nú nema 1 staf aptan af deili, það er stafinn 6; vèr lokum hann því í sviga. Nú er líka y' fundið $= 4$. þá er $2 . 4 . 0{,}9 = 8 . 0{,}9 = 7{,}2$. Hinn fyrsti stafur deilis er $< 7{,}2$; þess vegna verður að hafa tvo hina fyrstu, nefnilega 73, eins og áður, og setjum vèr strykið yfir þá. Hinn fyrsti *divisor* er þá einungis 73540. Vèr deilum þá $\frac{527517}{73540}$, og fáum 7 í kvóta. Með honum margfaldast 6, talan, sem skorin var aptan af *divisor*, kemur 42; einingastafnum hèr í sleppa menn, en geyma tugastafinn 4, og leggja við framkvæmið: $73540 \times 7 = 514780$; kemur 514784. þetta dregst frá 527517; kemur leifin 12733. Til hennar færist nú enginn stafur ofan úr *dividendus*; en í þess stað er burtnuminn 1 stafur að nýju af *divisor*, nefnilega 0, svo næst verður 7354 *divisor*. þessi afnumning er og samhljóða forskriptinni β, því eptir að 6 var afnumið, þá eru 3 stafir eptirverandi í *divisor*, nefnilega 540, en í kvótann vantar 3 stafi; þess vegna

$$3 > 3 - 1 = 2.$$

Nú deilum vèr $\frac{12733}{7354} = 1$, og fáum 4ða staf kvótans, en annan í hinni styttu deilingu. Með honum margfaldast 0, kemur ekkert til geymslu að leggja við framkvæmið $7354 \times 1 = 7354$. það dregst frá 12733; kemur leif 5379. Engin er niðurfærsla stafs úr *dividendus*, en í hennar stað ný afnumning af *divisor*, nefnilega stafurinn 4, (það er og rètt eptir β), svo nú verður *divisor* 735 (þriðji *divisor*). Með honum deilist 5379 (þriðji *dividendus*), kvótinn verður 7 (hinir síðari 7 í kvótanum). Loksins er afgangur 232, og er það hinn seinasti *dividendus*. Honum skal deila með seinasta *divisor* $\overline{73}$; kemur í kvóta 3, þá seg: 3svar 5 er 15, geym 1. 3svar 73 er 219, legg hið geymda við; verður 220, frá 232 er 12. Vèr sjáum, að hinir seinustu stafir af *dividendus* 0127 hafa aldrei notaðir verið, vegna afnumninganna

af *divisor*. þeir eru þess vegna skornir aptan af *dividendus*. þeir flytjast nú ofan til hinna seinustu leifa 12, kemur 120127. Loksins er aðgætt, hvort hinn upphaflegi *divisor* er meiri eða minni en þessi tala, og þar hann er meiri, þá bætist hèr ekki 1 við kvótann, svo hann verður 897173.

216. Til samanburðar við framanskrifað dæmi setjum vèr það hið sama hèr útreiknað með óstyttri deilingu, og afmörkum með standandi strykum þann hluta dæmisins, er hin stytta deiling afnemur.

		$\overset{4\,3\,2\,1}{\overline{7354}}0(6))\ 65978651\vert 0127$	$(8\,9\,\overset{x_1 x_2 x_3 x_4}{7\,1\,7\,3}$
		$5883248\ldots\ldots$	
		$7146171\ldots\ldots$	
		$6618654\ldots\ldots$	
x_1	I^ti^ *dividendus*	$527517\vert 0\ldots$	
$7 . 6 = 42$	$x_1\ d\ =$	$514784\vert 2\vert\ldots$	
$x_2\ d_1$	II^ar^ *dividendus*	$12732\vert 8\vert 1\ldots$	x_2
$1 . 0 = 0$	$x_2\ d\ =$	$7354\vert 0\vert 6\ldots$	$100 . 6 = 600$
$x_3\ d_2$	IIIji *dividendus*	$5378\vert 7\vert 52 .$	x_3
$7 . 4 = 28$	$x_3\ d$	$5147\vert 8\vert 42 .$	$70 . 06 = 420$
$x_4\ d_3$	IVði *dividendus*	$230\vert 9\vert 107$	x_4
$3 . 5 = 15$	$x_4\ d$	$220\vert 6\vert 218$	$3 . 406 = 1218$
		$10\vert 2\vert 889.$	

Allur sá hluti frádraganna, sem er vinstra megin við standstrykin, er sameiginlegur hinni óstyttu og styttu deilingu. þeir hlutar frádraganna, sem hægra megin eru við vinstra standstrykið, eru í hinni óstyttu deilingu. *Minuendarnir* báðum megin við standstrykin, eða alveg þvert yfirum, heyra til hinni óstyttu deilingu. þessir eiga að berast saman við *minuendana* í (215) í hinni styttu deilingu. Kvótastafirnir í hinni styttu deilingu táknast hèr í (216) með x_1, x_2, x_3, og x_4, og má þetta eptir *indexunum* lesa: kvótastafur hinnar fyrstu styttu deilingar, annarar, þriðju og fjórðu. Upp yfir *divisor* standa og tölur, sem vísa á einingastafi hins fyrsta, annars, þriðja og fjórða *divisors*. Nú margfaldast hver *divisor* með tilsvaranda kvótastaf, eins og deilingarinnar lög gjöra ráð fyrir, og þegar einingastafir þessara *divisora* skulu eptir því margfaldast, þá er það hèr táknað vinstra megin, t. d.

$$\overset{x_1}{7} . 6 = 42.$$

Einingastafur þessa *products* 2 skrifast milli standstrykanna með þremur punktum á eptir, sem tákna, eins og 3 núll, að þær 2 einingar merki 2 þúsundir. Tugastafurinn í *productinu* 42, nefnilega 4, geymist og bætist við *product* næsta deilisstafs 0, nefnilega 7 . 0 = 0, og þar við bætast þeir 4 geymdu. Þessir 4 skrifast nú á sinn stað í *productið* $x_1 d$, lenda þeir þá framantil við vinstra standstrykið. Þetta er þá bæði samkvæmt venjulegum margföldunarreglum og líka reglum hinnar styttu deilingar í (214), er segja, að með x_1 margfaldist hinn fyrsti *divisor*, og þar við bætist geymd tala frá margföldun hins næsta afskorna deilisstafs hægra megin. Hèr var hann (6). Með þessu móti verður þá í *productinu* 42 tugastafurinn 4 reglulega frádreginn í báðum deilingunum, en einingastafurinn 2 alls ekki í hinni fyrstu deilingu. Hèr verður þá aðskilnaður milli deilinganna: þessir 2 í 42 verða í hinni óstyttu deilingu dregnir frá 0 eða 10 fyrir ofan, koma svo 8 í mismuninn fyrir neðan, en þessi frádragning er gjörsamlega undanfeld í hinni styttu deilingu, að svo miklu leyti sem vinstra standstrykið ræður. Hèr bið eg lesarann að bera nákvæmlega saman dæmið í báðum stöðunum, hèr og í (215).

Með sama hætti er með sèrframkvæmin, sem á eptir koma, $x_2 d$, $x_3 d$, og $x_4 d$, að einingastafir *productanna*, þar sem einingastafir *divisoranna* margfaldast með tilheyrandi kvótastaf, lenda á milli standstrykanna og verða frádregnir í hinni óstyttu deilingu, en ófrádregnir í hinni styttu deilingu, en tugastafirnir í sömu *productum* geymast og viðleggjast vinstra megin vinstra standstryksins í báðum deilingunum. Hinir undanfeldu frádragar (einingastafirnir) milli standstrykanna eru hèr 2, 0, 3, 6, að tölu 4, eins og kvótastafirnir eru margir y' í hinni styttu deilingu. Hèr að auk koma nú aðrir undanfeldir frádragar hægra megin við hægra standstrykið eða rèttara sagt, frádragar í hinni óstyttu deilingu, en undanfeldir í hinni styttu, og þeir eru að mestu eins margir sem hinir; hèr eru þeir einum færri. Þessi eru hèr: 6, 42, 218. Hvernig þessir eru fram komnir, er skýrt frá hægra megin.

$$\overset{x_2}{100} \;.\; 6 = 600.$$

Í staðinn fyrir 600 stendur hèr

6 . .

eða 6 með tveimur punktum, er gilda fyrir núll; eins er 42.= 420, og 218, sem eru einingar. þessi 218 skyldu annars vera 1218, en þúsundastafurinn 1 er hlaupinn fram fyrir síðara standstrykið, og kominn sem geymd tala saman við 5, er annars standa skyldi milli standstrykanna.

Nú er að hugleiða, hvað úr þessum undanfeldu frádrögum getur mikið orðið í mesta lagi, til að skekkja rètta deilingu. Tökum þá fyrst undanfeldu frádragana milli standstrykanna, og setjum, að hver þeirra væri 9, eins og í mesta lagi orðið getur, þá væri þeir til samans 9 . y' eða hèr 9 . 4; en þessir stafir milli standstrykanna eru hèr þúsundastafir, svo summa þeirra verður

$$9 \, . \, y' . \, 1000,$$

eptir því sem í mesta lagi getur orðið. Sè nú þetta saman borið við næstu hærri eingastètt vinstra megin við vinstra standstrykið, sem er einingastètt hins fyrsta *dividendusar,* þá verða allir hinir áðurnefndu 9 að $\frac{9}{10}$ pörtum úr einingu þar gildandi einingastèttar, eða í tugabrotum = 0, 9 úr henni. Af þessu kemur þá

$$0, 9 \, . \, y' . \, 10000,$$

sem er hin mesta summa hinna undanfeldu frádrátta milli standstrykanna. Hèr við bætast hinir undanfeldu frádragar hægra megin við hægra standstrykið. þeir eru allir minni en 9 einingar, þær sem eru milli standstrykanna. Af þeim geta nefnilega komið geymdar einingar inn á milli standstrykanna, t. a. m. í *productinu* 3 . 406 = 1218, eins og hèr þúsundastafurinn 1. En ímyndum oss nú, að kvótastafurinn x_4 hefði verið 9, og hundraðastafurinn í deili einnig 9, þá hefði *productið* orðið 9 . 9 = 81, og ef þar að auki hefði 9 geymdir verið, þá hefði sú tala orðið 90, og tugastafurinn 9 hefði þá komizt fram á milli standstrykanna. þetta bætist þá við hina áðursögðu summu, og er það nærri eins mikið og hún var. (þó eru raunar tölurnar einni færri). Summan verður því undir það að vera $2y'$. 0,9 . 10000.

Í reglunum (214) stendur: Af *dividendus* burtskerast hægra megin eins margir stafir, sem hinn upphaflegi *divisor* hafði eptir hina merktu stafi, og það, sem þá er eptir af *dividendus,* myndar hinn fyrsta *dividendus.* Hèr af leiðir, að einingin í hinum síðara eða síðasta merkta staf í *divisor* er hin sama, sem í seinasta staf hins fyrsta *dividendusar.* þegar því hin merkta tala í *divisor* á að vera stærri en $2y'$. 0,9, þá er þar með ætlazt til,

Hægra megin við hægra standstrykið:

$$2000 + 0600 + 8420 + 6218 = 17238.$$

Þetta hvorttveggja til samans 207238. En *divisor* í dæminu er 735406. Það vill þá svo til í þessu dæmi, að undanfeldu frádrættirnir eru svo litlir, að þeir ekki geta raskað kvótanum, þó byrjað sè með styttu deilinguna fyrr en reglan segir. Vèr viljum setja útreikninginn hèr:

```
73540(6)) 6597865|10127 (897173
           5883248
           -------
            714617
            661865
            ------
             52752
             51478
             -----
              1274
               735
              ----
               539
               514
               ---
                25
                21
---------------------------
735406 > 410127.
```

Þó svona vilji til í þessu dæmi, að undanfeldu frádragarnir verði svo litlir, að þeir ná ekki *divisor*, þá er þó aldrei vert að víkja svona frá reglunni. Reglan er líka svo hæg, að það er enginn lèttir í að víkja frá henni, og að fylgja reglunni er svo miklu betra, sem menn eru þá óhultir, en aldrei, ef menn víkja frá henni. Menn vita heldur ekkert fyrirfram um stærð hinna undanfeldu frádraga, fyrr en menn hafa reiknað þá út með óstyttri deilingu.

217. Í venjulegri óstyttri deilingu eru leifarnar ætíð minni en sá *divisor*, sem þær framkoma af (að fráteknu því, er menn gjöra hið gagnstæða með vilja, svo sem í *congruentium*). Þar á móti í styttri deilingu ber það við, að leifin verði jöfn *divisor*, vegna þess menn fella alt af stafi aptan af *divisor*, og margfalda hinn seinast affelda staf til að fá tölu geymda. Samt verður aldrei leifin stærri en *divisor* að meðreiknuðum hinum affelda staf, skoðuðum sem tugabrot væri; því ef svo væri, þá væri það merki til, að kvótastafurinn væri of lítill. Dæmi:

12,9) 102 (7
90
—
12.

Væri þar á móti:

12,9) 103 (7
90
—
13,

þá væri kvótastafurinn 7 of lítill, því

12,9) 103 (8
103
—
0.

þannig getur afgangurinn hèr verið 12, en ekki stærri.

218. Sú tala, sem fæst með því að færa ofan til hinnar seinustu leifar tölu þá, sem skorin var aptan af *dividendus*, getur verið stærri en *divisor*, en er þó minni en hinn tvöfaldi *divisor*. því hin seinasta leif er í hæsta lagi jöfn seinasta *divisor* (217), og hinir burtvörpuðu stafir af *dividendus* eru jafnmargir stöfunum í hinum gefna *divisor* hægra megin við hinn seinasta *divisor*. Hin umtalaða tala er því í hæsta lagi eins stafamörg, sem hinn gefni *divisor*, og þó hún hafi svo marga stafi, þá getur þó ekki hinn fyrsti stafur hennar verið stærri en fyrsti stafur *divisors*. Hèr af leiðir, að hin umrædda tala getur verið stærri en *divisor*, en þó aldrei jafnstór hinum tvöfalda *divisor*.

219. *Dividendus* í hinni styttu deilingu er summa framkvæmis deilis og kvóta, tölunnar, sem framkom við niðurfærslu hinna burtvörpuðu stafa af deilanda til hinnar síðustu leifar, þegar þar frá er dregin summa hinna undanfeldu frádraga. Sè M *dividendus*, N *divisor*, P kvóti, R hin seinasta leif með hinum niðurfærðu stöfum deilanda aptan við sig, og E summa hinna undanfeldu frádraga, þá er

$$M = N \,.\, P + R - E.$$

Í dæminu hèr að framan er

$$659786510127 = 735406 \,.\, 897173 + 120127 - E.$$

Í hinni styttu deilingu vita menn ekki E, en það var í dæminu 207238.

Deili menn þessari *formulu* með *divisor* N, kemur

Hægra megin við hægra standstrykið:

2000 + 0600 + 8420 + 6218 = 17238.

þetta hvorttveggja til samans 207238. En *divisor* í dæminu er 735406. það vill þá svo til í þessu dæmi, að undanfeldu frádrættirnir eru svo litlir, að þeir ekki geta raskað kvótanum, þó byrjað sè með styttu deilinguna fyrr en reglan segir. Vèr viljum setja útreikninginn hèr:

```
73540(6)) 6597865|10127 (897173
          5883248
           714617
           661865
            52752
            51478
             1274
              735
              539
              514
               25
               21
735406  >   410127.
```

þó svona vilji til í þessu dæmi, að undanfeldu frádragarnir verði svo litlir, að þeir ná ekki *divisor*, þá er þó aldrei vert að víkja svona frá reglunni. Reglan er líka svo hæg, að það er enginn lèttir í að víkja frá henni, og að fylgja reglunni er svo miklu betra, sem menn eru þá óhultir, en aldrei, ef menn víkja frá henni. Menn vita heldur ekkert fyrirfram um stærð hinna undanfeldu frádraga, fyrr en menn hafa reiknað þá út með óstyttri deilingu.

217. Í venjulegri óstyttri deilingu eru leifarnar ætíð minni en sá *divisor*, sem þær framkoma af (að fráteknu því, er menn gjöra hið gagnstæða með vilja, svo sem í *congruentium*). þar á móti í styttri deilingu ber það við, að leifin verði jöfn *divisor*, vegna þess menn fella alt af stafi aptan af *divisor*, og margfalda hinn seinast affelda staf til að fá tölu geymda. Samt verður aldrei leifin stærri en *divisor* að meðreiknuðum hinum affelda staf, skoðuðum sem tugabrot væri; því ef svo væri, þá væri það merki til, að kvótastafurinn væri of lítill. Dæmi:

12,9) 102 (7
90
12.

Væri þar á móti:

12,9) 103 (7
90
13,

þá væri kvótastafurinn 7 of lítill, því

12,9) 103 (8
103
0.

þannig getur afgangurinn hèr verið 12, en ekki stærri.

218. Sú tala, sem fæst með því að færa ofan til hinnar seinustu leifar tölu þá, sem skorin var aptan af *dividendus*, getur verið stærri en *divisor*, en er þó minni en hinn tvöfaldi *divisor*. því hin seinasta leif er í hæsta lagi jöfn seinasta *divisor* (217), og hinir burtvörpuðu stafir af *dividendus* eru jafnmargir stöfunum í hinum gefna *divisor* hægra megin við hinn seinasta *divisor*. Hin umtalaða tala er því í hæsta lagi eins stafamörg, sem hinn gefni *divisor*, og þó hún hafi svo marga stafi, þá getur þó ekki hinn fyrsti stafur hennar verið stærri en fyrsti stafur *divisors*. Hèr af leiðir, að hin umrædda tala getur verið stærri en *divisor*, en þó aldrei jafnstór hinum tvöfalda *divisor*.

219. *Dividendus* í hinni styttu deilingu er summa framkvæmis deilis og kvóta, tölunnar, sem framkom við niðurfærslu hinna burtvörpuðu stafa af deilanda til hinnar síðustu leifar, þegar þar frá er dregin summa hinna undanfeldu frádraga. Sè *M dividendus*, *N divisor*, *P* kvóti, *R* hin seinasta leif með hinum niðurfærðu stöfum deilanda aptan við sig, og *E* summa hinna undanfeldu frádraga, þá er

$$M = N \,.\, P + R - E.$$

Í dæminu hèr að framan er

$$659786510127 = 735406 \,.\, 897173 + 120127 - E.$$

Í hinni styttu deilingu vita menn ekki *E*, en það var í dæminu 207238.

Deili menn þessari *formulu* með *divisor N*, kemur

$$\frac{M}{N} = P + \frac{R}{N} - \frac{E}{N}.$$

það er sannað í (216), að hinir undanfeldu frádragar eru minni að summunni til en *divisor;* þess vegna $\frac{E}{N} < 1$; en það sjá menn, hvort R er minna eða stærra en N. Sè $R < N$, þá er $\frac{R}{N} < 1$, og

$$\frac{M}{N} \text{ milli } P \pm 1;$$

vegna þess $\frac{R}{N} - \frac{E}{N} = \frac{R-E}{N}$, eða mismunur stærða, sem báðar eru < 1, verður að vera < 1, þegar þær eru báðar *positifar,* því *minuendus* er stæstur þeirra, ef þær ekki eru jafnar (25,2). þó að væri $R = E$, þá yrði mismunurinn $= 0$, og þá væri

$$\frac{M}{N} = P,$$

sem einnig er samhljóða höfuðreglunni, að $\frac{M}{N}$ sè milli $P - 1$ og $P + 1$.

Sè nú $R = N$, þá verður $\frac{R}{N} = 1$, og þá

$$\frac{M}{N} = P + 1 - \frac{E}{N}.$$

Brotið $\frac{E}{N}$ skerðir þá þann 1, sem er fram yfir P, svo $\frac{M}{N}$ liggur þá milli P og $P + 1$.

Sè nú þar á mót $R > N$, þá er $\frac{R}{N} > 1$; en það er sannað (218), að $R < 2N$. Hèr af leiðir þá, að í deilingunni $\frac{R}{N}$ getur heila talan í kvótanum aldrei orðið stærri en 1, svo þá má draga nefnarann N frá teljaranum R til að fá teljara brotsins í kvótanum, verður þá

$$\frac{R}{N} = 1 + \frac{R-N}{N}.$$

þegar þetta er sett inn í *formuluna*

$$\frac{M}{N} = P + \frac{R}{N} - \frac{E}{N},$$

kemur

$$\frac{M}{N} = P + 1 + \frac{R-N}{N} - \frac{E}{N}.$$

Hèr vita menn ekki, hvort stærra verður $\frac{R-N}{N}$ eða $\frac{E}{N}$, eða hvort mismunurinn er *positifur* eða *negatifur*, en það vita menn, að hann er $< \pm 1$; þess vegna

$$\frac{M}{N} \text{ milli } (P+1) \pm 1.$$

Af þessu kemur reglan seinast í (214), nefnilega: Ef *divisor* er minni en *R*, eða tala sú, sem framkemur, þegar til hinnar seinustu leifar niðurflytjast hinir afskornu stafir í *dividendus*, þá skuli bæta 1 við hinn fundna kvóta; annars láta hann óbreyttan.

Dæmi, sem sýnir þetta: 37498998126 : 86923.

$$\begin{array}{rrl}
\bar{8}692(3)\ ) & 3749899|8126 & (431404 \\
 & \underline{347692} & \quad\underline{\qquad\qquad 1} \\
 & 272979 & \quad 431405 \text{ kvóti.} \\
 & \underline{260769} & \\
 & 12210 & \\
 & \underline{8692} & \\
 & 3518 & \\
 & \underline{3476} & \\
 & 42 & \\
 & \underline{34} & \\
 & 88126 > 86923. &
\end{array}$$

Eptir (213) verður hèr fyrirfram sèð, að stafafjöldi kvótans muni verða 6, því deilandi hefir 11, en deilir 5 stafi, mismunurinn þá 6, því hèr er eptir táknuninni þar ($^3\frac{7}{8}$), nefnilega: 8 verða ekki hafðir í 3, heldur í 37. Kvótastafirnir eru því 6. Þar næst er að ákvarða seinasta *divisor*, eptir reglunni (214), $2y \cdot 0{,}9 = 2 \cdot 6 \cdot 0{,}\ 9 = 12 \cdot 0{,}9 = 10{,}8$. Eptir því ætti að merkja tvo stafi framan af *divisor*. En vèr látum það bíða, unz búið er að ákvarða, nær stytta deilingin byrjar. Eptir þessa tvo stafi koma þrír stafir í deili, en 6 stafir eru ófundnir í kvóta, þá er eptir *formulunni* (215)

$$e < v - 1$$
$$3 < 6 - 1 = 5.$$

Hèr á þá ekki stytta deilingin að byrja fyrr en eptir tvær deilingar. Eptir venjulegum hætti ákvörðum vèr hinn fyrsta kvótastaf $= 4$. Þá vantar oss fimm stafi í kvóta. Þá er $2 \cdot 5 \cdot 0{,}9 = 9{,}0 = 9$; og segir það, að enn eigi að vera merktir 2 stafir í deili: Þá er:

$$3 < 5 - 1 = 4.$$

þá deilist enn með óstyttri deilingu og fæst kvótastafurinn 3. Nú eru 4 stafir ófengnir í kvóta; þá $2 \cdot 4 \cdot 0{,}9 = 7{,}2$. En fyrsti deilisstafur er 8, og er hann stærri en 7,2; og á því ekki að merkja nema 1 staf í deili, þá eru 4 stafir, sem á eptir fylgja; þess vegna eptir β í (215)

$$4 > 4 - 1 = 3.$$

Hèr byrjar þá stytta deilingin. Teljum vèr þá þrjá stafi af deili eptir hinn merkta, og skerum hinn fjórða aptan af, sem er 3. Höldum vèr svo áfram styttu deilingunni eptir áðursögðum reglum, og bætum 1 við kvótann, þar deilirinn er $< R$. Hèr setjum vèr óstyttu deilinguna til samanburðar.

```
86923) 37498998126 (431404 68234/86923
       347692..
       ------
        272979
        260769
       --------
         122108
          8692|3|...
         ----------
          3518|5|1
          3476|9|2..
         -----------
            41|5|926
            34|7|692
           ---------
             6|8|234.
```

Berum vèr nú kvótana saman í báðum deilingunum, þá sjáum vèr, að hinn rètti kvóti liggur á milli $(P+1) + 0$ og $(P+1) - 1$, og er það samkvæmt reglunni

$$\frac{M}{N} \text{ milli } (P+1) \pm 1.$$

Hèr er og summa hinna undanfeldu frádraga $3000 + 9000 + 7000 + 200 + 692 = 19892$, sem er minna en deilirinn, eins og á að vera. þar á mót, ef stytta deilingin hefði verið byrjuð einum staf fyrri, þá hefði hún (nefnilega summan hinna undanfeldu frádraga) orðið

$$90000 + 20000 + 60000 + 40000 + 3000 + 9200 + 7692 = 229892,$$

sem er fram undir þrem sinnum svo stórt sem deilirinn, svo vèr höfum hèr þá dæmi upp á það, hversu ótækt það er, að byrja styttu deilinguna, fyrr en reglurnar segja.

220. þessi aðferð hinnar styttu deilingar er fyrirskrifuð af

Professorunum *Ramusi* og *Steen*. En eg hygg, að hún muni þykja nokkuð umsvifamörg. Vil eg því setja hèr aðra, sem *Berg* kennir í sinni *mathematík*, bls. 96. Hún er sú, sem nú skal greina: Af *dividendus* skal skera hægra megin einum færri tölustað, en *divisor* hefir marga. Þar næst skal deila eptir venjulegum hætti. Gangi þá upp, skal bæta við kvótann eins mörgum núllum, sem stafir voru burtteknir af *dividendus*. Dæmi: deilum

5114253967531 : 87468.

87468) 511425396|7531 (58470000
437340
740853
699744
411099
349872
612276
612276
0.

Hèr hefir *divisor* 5 tölustafi; þess vegna skerast 4 tölustafir aptan af *dividendus*, og síðan deilist eptir venjulegum hætti 87468 í 511425396; verður þá kvótinn 5847 og afgangur 0. Við kvótann verður því að bæta 4 núllum, þar 4 stafir voru skornir af deilanda. Þessi kvóti er rèttur og mismunar minna en 1 einingu frá hinum fulla kvóta. Þetta má sanna þannig: Ætti að halda áfram hinni venjulegu deilingu, þá ætti að færa niður deilandastafinn 7, og þegar þessari sèrdeilandi ætti að deila með 87468, mundi núll koma í kvóta, sem er hið fyrsta. Þar nú 87468 verður ekki heldur haft í 75, yrði að skrifa annað núll í kvóta; en þar eins fer, og ekki má deila 753 með 87468, þá kemur þriðja núllið í kvótann og deilandastafurinn 1 verður að færast niður. Loksins þar 7531 er of lítið til að deilast með 87468, kemur fjórða núllið í kvótann, og leifin 7531 verður teljari brotsins í blöndnu tölunni $58470000\frac{7531}{87468}$.

Verði þar á mót afgangur, þá deilist hann ekki með öllum *divisor*, því það verður ekki, þar afgangurinn er minni en *divisor*. Afgangurinn deilist þá með *divisor*, að afnumdum hans seinasta staf, eins og í *Guy's* aðferð hèr að framan, svo hèr er hinn rètti tími að byrja styttu deilinguna, og halda svo áfram eptir *Guy's* aðferð.

Sönnun fyrir því, að skera skuli aptan af *dividendus* svo marga stafi, sem eru í *divisor* að afnumdum einum, er þessi: Deilingin endar, og allir kvótastafirnir eru fengnir, þegar seinasti stafur hins margfaldaða *divisors* er kominn niður undan seinasta staf í *dividendus*. Þetta má sjá á öllum óstyttum deilingum. Til þess því að sjá allar legur *divisors* undir *dividendus*, þær er hin stytta deiling innibindur, má telja alla stafi *divisors*, og ímynda sèr, að þeir væri skrifaðir niður undan seinustu stöfunum í *dividendus*, þá lendir fyrsti stafur *divisors* þar, sem óstytta deilingin á að enda. Þess vegna skal hèr afnema 1 staf af *divisor*, áður en hinna stafanna tala er numin af *dividendus*. Nú deilist hèðan í frá með styttu deilingunni, en í staðinn fyrir að láta *divisorinn* færast staf fyrir staf til hægri, skal nema af honum staf í hvert sinn, svo aldrei komist hann yfir vinstra standstrykið í dæminu (216), líka, ef vill, má samanbera við dæmið með standstrykunum í (219); þá sèst, að færslur *divisors*, eða hèr afnumningar af honum, verða eins margar, sem stafirnir í *divisor* að afteknum hinum fyrsta, sem er innan vèbanda hinnar óstyttu deilingar.

Dæmi *Bergs:*	Sama eptir *Guy:*
7891) 9123|456 (1156	7891) 91234|56 (1156
7891	7891
1232	12324
789	7891
443	4433
395	3945
48	488
47	473
1.	1556.

Þegar *dividendus* ekki hefir *divisor* í sèr, eptir að búið er að skera af honum (*dividendus*) áðursagða stafatölu, þá skal burtnema af *divisor* hægra megin svo marga stafi, að deila megi.

Dæmi *Bergs:* 368475 : 25783.

Eptir *Berg:*	Eptir *Guy:*
25|783) 36|8475 (14	257|83) 368|475 (14
26	257
10	111
10	102
0.	9475.

Hin þriðja aðferð hinnar styttu deilingar er eptir *Fourier*. Henni sleppum vèr öldungis. Um hana má lesa í *Fallesens rene Mathematik, bls. 128 o. s. frv.*

221. Hin stytta deiling heimfærð eða notuð við brot.

Reglur:

1. Ákvarðast, hversu mikla nákvæmni hin gefnu brot geta gefið eptir *formulunni* $\frac{2(M\beta + N\alpha)}{N^2 - \beta^2}$ í (210) til (212).

2. Skal flytja kommuna í *dividendus* til hægri samkvæmt hinni mestu nákvæmni, eða samkvæmt annari minni eptir geðþekkni yfir n tölustafi eptir $\frac{M.10^n}{N}$, ellegar $\frac{M}{N10^n}$, og eiga seinast eins margir stafir að afskerast, ellegar eins mörg núll bætast við, eptir því hvort hin fyrri eða síðari forskriptin er viðhöfð. Er þá auðskilið, að hin gefna stærð $\frac{M}{N}$ ekki raskast við þetta eða skekkist, þar skekkingin verður lagfærð á eptir.

3. Síðan skal ákvarða kvótastafafjöldann eptir (213) með því, að færa kommuna í deili til hægri, þannig að einhverjir stafir aðrir en núll verði þar heilir, svo sèð verði, hvort kvótastafafjöldinn er $= d + 1$ eða $= d$, og um leið að nýju færa um eins marga reiti kommuna í *dividendus* til hægri, svo brotið ekki skekkist; skoða síðan báðar heilu tölurnar í deili og deilanda, og ákvarða eptir þeim kvótastafafjöldann, eins og áður er sagt. Að stærð ekki skekkist, þó komma sè færð jafnmikið til hægri (eða vinstri) í deili og deilanda, er ljóst af (83).

4. Þessi kommufærsla í 3 í þessum tölulið er einungis í bráð til að finna kvótastafafjöldann y. En þegar hann er fundinn, skal eptir honum marka fyrstu stafi deilis (eptir *Guy*), og ef hinir eptirfylgjandi ómörkuðu stafir í deili verða færri eða jafnmargir sem $y - 1$, þá að láta allan deili verða heilan með því, að færa kommuna aptur fyrir hann, og undir eins færa kommuna um eins marga stafi í deilanda. En verði hinir ómörkuðu stafir í deili fleiri, þá sníð alla þá af, sem fram yfir eru y, og fær kommuna í deilanda um eins marga stafi, og kasta svo brotunum burt.

5. Þessar reglur, hin 3ja og 4ta, eiga við *Guy's* styttu deilingu; en við hina, sem *Berg* fyrirskrifar, á sú aðferð, að gjöra

deili og deilanda að heilum tölum, með því að *multiplicera* þá báða með því tugaveldi, er hefir eins mörg núll, sem tugabrotsstafir eru margir í því brotinu, sem hefir þá fleiri í deili eða deilanda, og deila síðan eptir Bergs aðferð $\frac{M10^n}{N}$ eða $\frac{M}{N10^n}$, og loksins fara eptir 2ri reglunni í þessum (221) tölulið til að finna $\frac{M}{N}$.

222. Dæmi:

Deila 3 : 0,0035843927.

Deilandi 3 er nákvæm stærð.

Forskript nákvæmninnar (210) er $\frac{2(M\beta + N\alpha)}{N^2 - \beta^2}$.

$$M = 3 \qquad \alpha = 0$$

$$N = 0{,}0035843927 \qquad \beta = 0{,}00000000005$$

$$\begin{array}{rl} 0{,}00000000015 & = M\beta \\ 0 & = N\alpha \\ \hline 0{,}00000000015 & (2 \\ \hline 0{,}00000000030 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0{,}0035 & = N \\ .,..35 & = N \\ \hline 175 & \\ 105 & \\ \hline .,....12|25 & = N^2 \end{array}$$

$$\tfrac{30}{12} = 2.$$

Í þessum 30 eru 11 *decimalar.*

Í þessum 12 eru 6 *decimalar,*

þá í kvótanum 2, 5 *decimalar,* og nákvæmni 0,00002 $= \frac{1}{10^4}$

eða í tíuþúsundustu pörtum. Þá er eptir fullri nákvæmni

$$\frac{M10^4}{N} = \frac{3\,0000}{0{,}0035843927.}$$

Nú færi eg kommuna aptur fyrir 35 í nefnaranum, það er yfir 4 stafi til hægri, þess vegna eins í teljaranum; kemur

$$\frac{300000000}{35}, \text{ kvótastafir} = d = 7 \text{ eptir (213)}$$

$$(\tfrac{30}{3}).$$

Síðan tökum vèr alla stafi nefnarans; koma þá 6 stafir nýir í nefnara og telja; þess vegna

$\overline{35}843927)\ 300000000000000\ (8369618$
286751416
13248584
10753178 kvóti = 836,9618.
2495406
2150635
344771
322595
22176
21505
671
358
313
286
35843927 > 27000000.

Nú viljum vèr reikna sama dæmi með nákvæmni í tíundupörtum. Fellur þá nákvæmnisútreikningurinn alveg burt, og nægir, ef vèr vitum, að ekki er farið út fyrir hennar takmark.

Þá er $\frac{M\,10^1}{N} = \frac{3\,0}{0{,}0035843927}$.

Ekki verða hafðir 35 í 30, þar fyrir, þegar komman í 0,0035 er færð aptur fyrir 35 um 4 staði, verður

$\frac{300000}{35}$, og kvótastafir $= d = 4$ $(^{30}_{\ 3})$.

Þá $\overline{35}843|927)\ 3000000000\ (8369$
m*) 286751
13249
10752
2497
2150
347
322
250000.

Kvóti = 836,9.

Loksins viljum vèr reikna þetta dæmi í tómum hundruðum; þá er

*) m þýðir, að sá tölustafur, sem er fyrir ofan m, eigi að margfaldast til að fá geymda tölu. 35843 er fyrsti divisor.

$$\frac{M}{N\,10^2} = \frac{3}{0{,}35843927.}$$

Hèr verður að færa kommuna um 2 reiti, og svo má ekki láta sèr nægja það, að 3 verða hafðir í 3, heldur verður að hafa ýmislega stafi með; og ekki verða 35 hafðir í 30; þess vegna

$$\frac{300}{35}.\ \text{Kvótastafir} = d = 1\ \left(\tfrac{30}{3}\right)$$

þá

$$\begin{array}{l} \overline{35}|843927)\ 30|0\ (8 \\ \qquad\qquad\quad \underline{28} \\ 35843927 > 20.\ \text{Kvóti} = 800. \end{array}$$

223. Í tölulið (211) er fundið takmark nákvæmninnar í þessari deilingu:

$$\frac{M}{N} = \frac{9{,}80896}{9{,}8696044,}$$

að megi finna kvótann nákvæman með 5 tugabrotsstöfum. Hèr má flytja kommuna um 7 reiti; þá verður eptir *Bergs* aðferð:

$$\frac{M}{N} = \frac{98089600}{98696044}$$

og

$$\frac{M\,10^5}{N} = \frac{9808960000000}{98696044.}$$

$$\begin{array}{rrl} 98696|044)\ 980896|0000000\ (99385 & & \\ 888264 & & \\ \hline 92632 & & \text{Kvóti} = 0{,}99385. \\ \left(\tfrac{92}{9}\right)\quad 88826 & & \\ \hline 3806 & & \\ 2960 & & \\ \hline 846 & & \\ 788 & & \\ \hline 58 & & \\ 49 & & \\ \hline 9. & & \end{array}$$

Þó svo sè, að tugabrot sè ónákvæm, eins og vèr höfum lengi um talað, þá eru þau þó stundum nákvæm, eins og vèr höfum áður sagt, og þá má *dividera* með sèrhverri nákvæmni.

Veldi (*Potestas*), og rót (*Radix*).

224. Hèr hefir áður opt verið talað um veldi; en einkum er þýðingu þess að finna í (53,1), að það sè framkvæmi taldra

jafnstórra gjöranda. Einn af þessum jafnstóru gjöröndum heitir rót (*radix*) og táknast með $\sqrt{}$, er kallast rótarmerki t. a. m. $\sqrt{25} = 5$; þar $5 . 5 = 25$. Rótarvísir (*exponens radicis*) kallast tala, sem stendur í klofanum á rótarmerkinu, og segir til, hvað margir hinir jöfnu gjörendur sè, er aðgreinast skulu í tölunni eða stærðinni, er rótarmerkið stendur framan við. t. d. $\sqrt[3]{125} = 5$, því $5 . 5 . 5 = 125$, og hèr eru 3 jafnir gjörendur, og er hver þeirra 5. Þessi stærð $\sqrt[3]{125}$ á að lesast: þriðja rótin af 125, og hún er 5. Standi engin rótarvísir í rótarmerkinu $\sqrt{}$, merkir það sama sem hann væri 2, þannig $\sqrt[2]{}$; og er það önnur rót og kallast kvaðratrót (*radix quadrata*), vegna þess að annað veldi heitir kvaðrat (*quadratum*). Sömuleiðis heitir $\sqrt[3]{}$ eða þriðja rótin kúbikrót (*radix cubica*), af því 3ja veldi heitir *cubus*. Með líkum hætti heitir $\sqrt[4]{}$ bíkvaðratrót, af því að fjórða veldi heitir bíkvaðrat eða *quadratum quadrati*. Hið fimta veldi m^5 kölluðu hinir gömlu *Surdesolidum* og rótina $\sqrt[5]{}$ *Surdesolid*rót. Hið sètta veldi kölluðu þeir *Zensicubus*, af því kvaðratið hèt *zensus*, og $m^6 = (m^2)^3$. Sjöunda hèt *bissurdesolidum*, 8da *Zensizensizensus*, *því* $m^8 = ((m^2)^2)^2$, 9da *Cubicubus*, *því* $m^9 = (m^3)^3$. Öll þessi nöfn eru nú aflögð, nema kvaðrat, *cubus* og *biquadrat*. Samber *H. W. Clemms mathematisches Lehrbuch*, 1er Theil.

225, 1. Skuli veldi sömu rótar margfaldast saman, þá má gjöra það með því, að rita rótina einu sinni með summu vísanna í vísis stað t. a. m.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

því a^m er sama sem rótin a sett m sinnum sem *factor*, og a^n er sama rót a sett n sinnum sem *factor*; þess vegna eptir margföldunar reglunum (53) á stafurinn a að skrifast einu sinni, en summa *exponentanna* verður hans *exponent*. t. d.

$$a^5 \times a^3 = a^8,$$

því

$$a^5 = aaaaa$$
$$a^3 = aaa,$$

þá verður framkvæmið

$$a^5 \,.\, a^3 = aaaaa \,.\, aaa = aaaaaaaa = a^{5+3} = a^8,$$

því bókstafirnir eiga allir fram að koma úr gjöröndunum í *productið*, en *exponentarnir* eru einungis til að stytta skriptina (53).

2. Skuli veldi sömu rótar deilast með veldi af sömu rót, þá skrifast í kvótann sama rót með *exponentanna* mismun; það er að skilja: frá *exponent dividendi* skal dragast *exponent divisors* þannig:

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

Þetta er sagt og sannað í (63), en verður kann ske ljósara þannig:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2.$$

Hèr kemur þá fram sú regla (63,3), að þeir bókstafir koma í kvóta, sem deilandi hefir fram yfir deili. Þess vegna yfir höfuð:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Hèr geta nú 3 tilfelli komið fyrir, nefnilega $m > n$, $m = n$, og $m < n$. Sè $m > n$, þá verður *exponent* kvótans *positifur*, sè $m = n$, þá verður *exponent* kvótans $= 0$, og sè $m < n$, þá verður kvóta *exponentinn negatifur*.

Dæmi upp á hið fyrsta er $\frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{5-3} = \frac{aaa|aa}{aaa|}$;

hið annað er $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1 = \frac{aaaaa}{aaaaa}$;

hið þriðja er $\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2} = \frac{aaaaa|}{aaaaa|aa}$.

Þessar þrjár deilingar geta nú líka skoðazt sem brot, og eru hèr veldin skrifuð með öllum *factorunum* í teljara og nefnara. Hinn sameiginlegi mælir teljara og nefnara er hèr afskorinn með standstryki, og má stytta þau brot og lengja með hverju veldi sem vill, svo sem með því veldinu, sem er lægra, þannig:

$$\text{hið fyrsta } \frac{a^5 : a^3}{a^3 : a^3} = \frac{a^2}{a^0} = \frac{a^2}{1} = a^2 \quad (\alpha)$$

$$\text{hið annað } \frac{a^5 : a^5}{a^5 : a^5} = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{a^0} = a^0 = 1 \quad (\beta)$$

$$\text{hið þriðja } \frac{a^5 : a^5}{a^7 : a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = \frac{a^0}{a^2} \quad (\gamma),$$

ellegar með veldinu, sem er stærra, þannig:

$$\text{hið fyrsta } \frac{a^5 : a^5}{a^3 : a^5} = \frac{1}{a^{-2}} = \frac{a^0}{a^{-2}} = a^2 \quad (\delta)$$

$$\text{hið annað } \frac{a^5 : a^5}{a^5 : a^5} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{a^0}{a^0} \quad (\varepsilon)$$

$$\text{hið þriðja } \frac{a^5 : a^7}{a^7 : a^7} = \frac{a^{-2}}{1} = \frac{a^{-2}}{a^0} = a^{-2} \quad (\zeta).$$

Þegar *exponent* sömu rótar er hinn sami í teljara sem nefnara, þá er stærðin $= 1$; og *exponens* kvótans $= 0$ (121); það verður einnig sýnt þannig t. d. um a^5:

$$\frac{a^5}{a^5} = \frac{aaaaa}{aaaaa} = \frac{1}{1} = 1 = a^0.$$

Þegar nefnarans *exponent* er stærri, þá er t. d.

$$\frac{a^5}{a^7} = \frac{aaaaa}{aaaaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} \text{ samber } (\gamma) \text{ og } (\zeta).$$

Því hér hefir deilandi *factor*atöluna — 2 fram yfir deili (63, 3), svo æfinlega gildir sú regla, að draga deilis *exponentinn* frá deilanda *exponentinum,* eins og sýnt var í (63).

Til að hafa dæmi í tölum upp á þetta óraskanlega lögmál *exponentanna,* set eg $a = 12$, og deili með 12 hvað eptir annað, þannig:

$$12)\ 12^3 = 12.12.12 = \frac{1}{12^{-3}} = \frac{12^3 : 12^3}{1 : 12^3} = 1728$$

$$12)\ 12^2 = 12^{3-1} = 12.12 = \frac{1}{12^{-2}} = \frac{12^2 : 12^2}{1 : 12^2} = 144$$

$$12)\ 12^1 = 12^{2-1} = 12 = \frac{1}{12^{-1}} = \frac{12^1 : 12^1}{1 : 12^1} = 12$$

$$12)\ 12^0 = 12^{1-1} = 1 = \frac{1}{12^0} = \frac{12^0 : 12^0}{1 : 12^0} = 1$$

$$12)\ 12^{-1} = 12^{0-1} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12^1} = \frac{12^0 : 12^0}{12^1 : 12^0} = \frac{1}{12}$$

$$12)\ 12^{-2} = 12^{-1-1} = \frac{1}{12.12} = \frac{1}{12^2} = \frac{12^0 : 12^0}{12^2 : 12^0} = \frac{1}{144}$$

$$12^{-3} = 12^{-2-1} = \frac{1}{12.12.12} = \frac{1}{12^3} = \frac{12^0 : 12^0}{12^3 : 12^0} = \frac{1}{1728}.$$

Hèr er fyrstu línunni deilt með 12, kemur þá hin önnur fram. Svo er og um allar hinar. En fjórði dálkurinn, sem byrjar með $\frac{1}{12^{-3}}$ er bygður á því, að *positifur exponent* í teljaranum jafngildir *negatifum exponent* í nefnaranum. þannig er

$$12 \,.\, 12 \,.\, 12 = 12^3 = \frac{12^3}{1} = \frac{1}{12^{-3}}, \text{ eins og } \frac{a^2}{1} = \frac{1}{a^{-2}} \text{ í } (\alpha) \text{ og } (\delta).$$

Í 5ta dálki er kunngjörð deiling sama brots $\frac{12^3}{1}$ í teljara og nefnara. þegar teljaranum 12^3 er deilt með 12^3, kemur 1 í teljarann; og þegar 1 í nefnara er deilt með 12^3, kemur $\frac{1}{12^3}$ eða 12^{-3}. Af þessu kemur brotabrotið:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{12^3}\right)}$$

sem eptir (98, 4) er

$$\frac{1 \,.\, 12^3}{\left(\frac{1}{12^3}\right) . \, 12^3} = \frac{12^3}{1} = 12^3.$$

þetta má og skoða sem deilingu með broti eptir (98, 3), þannig:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{12^3}\right)} = 1 : \frac{1}{12^3} = 1 \,.\, \frac{12^3}{1} = 12^3.$$

Einnig má í þriðja lagi fyrir neðan strykið í $\frac{12^3 \,:\, 12^2}{1 \,:\, 12^3}$ setja 12^0 í staðinn fyrir 1, svo verði:

$$\frac{12^3 \,:\, 12^3}{12^0 \,:\, 12^3},$$

þá verður frádragning vísanna fyrir neðan strykið $0 - 3 = -3$, og þá kvótinn fyrir neðan strykið $= 12^{-3}$; en fyrir ofan strykið 1, eins og áður. þá verður

$$\frac{12^3 \,:\, 12^3}{12^0 \,:\, 12^3} = \frac{1}{12^{-3}}$$

eins og áður er fundið.

Fjórða línan í þessari töflu sýnir, að eins og 0 liggur milli + 1 og — 1, svo liggur *factora*talan 0 milli *factora*talnanna + 1 og — 1, svo að 12^0 getur hvergi verið annarsstaðar en þar, með því *exponent* er ekkert annað en *factora*tala.

Vèr sjáum þá á þessari töflu, að það er einungis áframhald deilingarinnar (t. d. hèr með 12), sem kennir oss merkingu *exponentanna* 0, — 1, — 2, o. s. frv., eða merkingu vísisins núlls og hinna *negatifu* vísa. Þetta lögmál *exponentanna* er því að minni hyggju æðra en nokkurt mannlegt samkomulag eða mannasetningar. Það liggur í eðli stærðanna, sett af hinum eilífa.

Merk: Þetta segi eg, af því nokkrar danskar lærdómsbækur milli ára 1834—1846, þó góðar sè, tala um þetta sem mannlegt samkomulag.

Samber *Bergs Förste Grunde i den almindelige Mathematik*, n° 127, bls. 116, og *Fallesens Begyndelsesgrunde i den rene Mathematik*, bls. 53.

226. Í bókstafabrotum, sem í teljara og nefnara eru einliðuð eða *monomia*, má flytja bókstafi úr teljaranum ofan í nefnarann og úr nefnaranum upp í teljarann, einungis með því að breyta merkinu við *exponentinn* í hið gagnstæða t. d.

$$\frac{a^4\, b^5\, c^2}{d^5\, e^6\, f^7\, g^{-3}} = \frac{d^{-5}\, e^{-6}\, f^{-7}\, g^3}{a^{-4}\, b^{-5}\, c^{-2}} = a^4\, b^5\, c^2\, d^{-5}\, e^{-6}\, f^{-7}\, g^3$$

$$= \frac{1}{a^{-4}\, b^{-5}\, c^{-2}\, d^5\, e^6\, f^7\, g^{-3}}$$

vegna þess að $a^m = \frac{a^m}{1} = \frac{1}{a^{-m}}$ og $a^{-m} = \frac{a^{-m}}{1} = \frac{1}{a^m}$ eptir (225).

Í fleirliðuðum teljurum og nefnurum má einnig stundum þessu viðkoma. Þó verður sú breyting, sem gjörð er í einum lið teljara eða nefnara, að gjörast í þeim öllum, svo sem

$$\frac{a}{b+c} = \frac{ab^{-1}}{1+cb^{-1}},$$

því ef eg deili b með b, verð eg líka að deila c með b, eptir (61); og þegar eg þannig hefi deilt öllum nefnaranum með b, verð eg líka að deila teljaranum með b, nema ef eg vil láta brotið b-faldast (95). Hèr má líka færa allan nefnarann upp í teljarann, þannig:

$$\frac{a}{b+c} = a\,(b+c)^{-1}.$$

Þó má hèr ekki margfalda liðina í svigunum með a, og það væri sama, hver *exponent* sem væri við svigastærðina annar en $+ 1$.

227. Menn geta af *negatifum exponentum* haft nokkurs konar lètti, þegar margfalda eða deila skal fleirliðuðum stærðum (*polynomiis*), vegna þess bókstafabrotin líta þá út eins og heilar tölur væri. T. d. ef margfalda skyldi

$$\frac{3}{2x^2} + x^2 - 2 + \frac{1}{3x} - 2x$$

með

$$\frac{2}{x} - 3 - x,$$

og skrifa þessa gjörendur með *negatifum exponentum* þannig eptir *exponentanna* röð:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
x^2 & -\,2x & -\,2 & +\,\tfrac{1}{3}x^{-1} & +\,\tfrac{3}{2}x^{-2} & & \\
-\,x & -\,3 & +\,2x^{-1} & & & & \\
\hline
-\,x^3 & +\,2x^2 & +\,2x & -\,\tfrac{1}{3}x^0 & -\,\tfrac{3}{2}x^{-1} & & \\
 & -\,3x^2 & +\,6x & +\,6x^0 & -\,x^{-1} & -\,\tfrac{9}{2}x^{-2} & \\
 & & +\,2x & -\,4x^0 & -\,4x^{-1} & +\,\tfrac{2}{3}x^{-2} & +\,3x^{-3} \\
\hline
-\,x^3 & -\,x^2 & +\,10x & +\,1\tfrac{2}{3}x^0 & -\,6\tfrac{1}{2}x^{-1} & -\,3\tfrac{5}{6}x^{-2} & +\,3x^{-3}.
\end{array}$$

Má svo skrifa framkvæmið með bókstafabrotum, ef vill, þannig:

$$-\,x^3 - x^2 + 10x + \frac{5}{3} - \frac{13}{2x} - \frac{23}{6x^2} + \frac{3}{x^3}.$$

Með líkum hætti er með deilinguna.

228. Beri menn saman það sem sagt er í (31) og (32) um játandi og neitandi stærðir við hið nú í (225, 1, 2) umtalaða *exponenta*lögmál, þá má sjá, að *positifir* og *negatifir exponentar*, eða setning og burtnumning jafnstórra gjöranda, eru gagnstæð horf. Í (32) er tekið til dæmis upp á gagnstæðar stærðir ferð í norður og suður, o. s. frv. Nú vitum vèr, að vèr getum skipt um nöfn á norðurferð og suðurferð, og kallað þá neitandi, sem vèr áður kölluðum játandi. Eins getum vèr með *exponentana*. Nú viljum vèr skoða, hvernig vèr getum eptir þessu umsnúið töflunni í (225, 2), og er það þannig:

$$\tfrac{1}{12}) \ (\tfrac{1}{12})^3 = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{12} = \frac{1}{(\frac{1}{12})^{-3}} = \frac{1}{1728}$$

$$\tfrac{1}{12}) \ (\tfrac{1}{12})^2 = (\tfrac{1}{12})^{3-1} = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{12} = \frac{1}{(\frac{1}{12})^{-2}} = \frac{1}{144}$$

$$\tfrac{1}{12}) \ (\tfrac{1}{12})^1 = (\tfrac{1}{12})^{2-1} = \tfrac{1}{12} = \frac{1}{(\frac{1}{12})^{-1}} = \frac{1}{12}$$

$$\tfrac{1}{12}) \ (\tfrac{1}{12})^0 = (\tfrac{1}{12})^{1-1} = 1 = \frac{1}{(\frac{1}{12})^0} = 1$$

$$\tfrac{1}{12}) \ (\tfrac{1}{12})^{-1} = (\tfrac{1}{12})^{0-1} = \frac{1}{(\frac{1}{12})} = \frac{1}{(\frac{1}{12})^1} = 12$$

$$\tfrac{1}{12}) \ (\tfrac{1}{12})^{-2} = (\tfrac{1}{12})^{-1-1} = \frac{1}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{1}{(\frac{1}{12})^2} = 144$$

$$(\tfrac{1}{12})^{-3} = (\tfrac{1}{12})^{-2-1} = \frac{1}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{1}{(\frac{1}{12})^3} = 1728.$$

Hinn 5ti dálkur í fyrri töflunni er hèr undanfeldur.

229. Sú athöfn að finna veldi út af rót þess, heitir *potentiatio* eða upphafning til veldis, eða að *potensera*. Hefði menn nú sèrhverja tölu a til allra velda með öllum *positifum* og *negatifum exponentum,* fá menn endalausar raðir velda, sem allar ganga í gegnum 1 eða a^0, undir eins og *exponentarnir* mynda óendanlega röð, sem gengur í gegnum 0, þannig:

$$\cdots -4, \ -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ +1, \ +2, \ +3, \ +4, \cdots$$
$$\cdots a^{-4}, \ a^{-3}, \ a^{-2}, \ a^{-1}, \ a^0, \ a^1, \ a^2, \ a^3, \ a^4, \cdots$$
$$\cdots \frac{1}{aaaa}, \ \frac{1}{aaa}, \ \frac{1}{aa}, \ \frac{1}{a}, \ 1, \ a, \ aa, \ aaa, \ aaaa, \cdots$$

Af þessum þremur línum er hin fyrsta *exponentanna* röð, en hin önnur og þriðja veldanna röð, hin fyrri skammskrifuð með *exponentum,* og hin síðari langskrifuð með *factorum* eða rótum. Þegar vèr nú hugleiðum, að a merkir allar tölur, (ekki einungis 12 og $\frac{1}{12}$ eins og í (225, 2) og (229)), þá sjáum vèr, að óendanlega margar veldaraðir eru til, og að þær allar krossa sig, eða ganga í gegnum 1, þar sem *exponentinn* er 0; þetta liggur í *formulunni*

$$a^0 = 1.$$

Skoðum vèr veldanna raðir sem óteljandi götur, þá verða gatnamót þeirra í 1, þar sem *exponentinn* er núll. Vilji nú

nokkur spyrja: Geta þá veldanna raðir ekki einnig gengið í gegnum núll? Vèr svörum jú, og spyrjandinn spyr: Hver er þar *exponentinn?* Þá svarast: veldanna raðir ganga í gegnum 0 brotanna megin við 1, þar sem *exponentinn* er $-\infty$, ef $a > 1$, og þar sem hann er $+\infty$, ef $a < 1$; þess vegna ætíð óendanlega langt burtu.

Athugi. Væri þessar götur málaðar, þá er auðsætt, að þær væri ekki beinar, þar þær hafa tvenn gatnamótin. Þær mynda boglínu eina, sem í hinni *analytisku geometriu* heitir *logistica*, eða hin *logarithmiska* lína. Það launar sig ekki að lýsa henni hèr.

230. Þegar m er *positift*, þá er

$$(+a)^m = +a^m, \quad 0^m = 0, \quad (-a)^m = \pm a^m.$$

Í seinustu líkingunni á að lesa efra merkið, þegar m er jöfn tala, en neðra, ef m er oddatala (58). Þetta mà alment tákna þannig:

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n}, \quad (\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}.$$

Þetta segir: Veldi með jöfnum *exponent* er ætíð *positift*, en veldi með ójöfnum *exponent* hefir sama merki sem rótin. Hèr á n að merkja hvaða tölu sem vill, þó heila. Verður þá $2n$ jöfn tala, en $2n+1$ ójöfn eða oddatala.

231. Sè *exponentinn* við 0 *negatifur*, þá verður merking veldis þess mjög á annan veg en í (230), því þá verður:

$$0^{-m} = \infty \cdots\cdot (\alpha),$$

því $0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0} = \infty$. Samber (73).

Sè *exponentinn* við 0 einnig 0, þá er:

$$0^0 = \textit{indeterminato} \cdots\cdots\cdots (\beta),$$

því $0^0 = \frac{0}{0} = \textit{indeterminato}$ (73, 5).

Ef a er > 1, þá er

$$a^{\infty} = \infty \cdots\cdot (\gamma),$$

því þá vex veldið við hvern *factor* þess. En sè $a < 1$, þá er

$$a^{\infty} = 0 \cdots\cdot (\delta),$$

því þá minkar veldið við hvern *factor* þess, og eins við $a = 0$, og þá er:

$$0^{\infty} = 0 \quad \cdots\cdot (\varepsilon).$$

Sè rótin = 1, þá er

$$1^{n} = 1 \quad \cdots\cdot (\zeta)$$

við allar endanlegar stærðir vísisins n, því *factorinn* 1 stækkar hvorki nè minkar, þó margfaldað sè með honum. En þetta getur verið á annan veg, ef *exponentinn* er ∞, því þá er

$$1^{\infty} = indeterminato \quad \cdots\cdot (\eta)$$

eða óákvörðuðu, því $1 = a^0$, samber (529), og $1^{\infty} = (a^0)^{\infty} = a^{0 \cdot \infty}$. En *exponentinn* $0 . \infty$ er óákvarðaður eða *indeterminatus* (73, 6). Þess vegna 1^{∞} óákvarðað. Þetta getum vèr einnig sèð með öðrum hætti: 1 liggur á óendanlega skörpu svæði eða brún milli launbrots, er hefir teljarann stærra en nefnarann, og sannarlegs brots, er hefir teljara minna en nefnarann (80). Nú hefjum vèr 1 upp í veldi með *exponenti* ∞, þá hlýtur veldið að leggja einhversstaðar á milli ∞ og 0 eptir γ og δ í þessum tölulið (231). En þetta er með öðrum orðum: að veldið 1^{∞} sè óákvörðuð stærð.

Ef $a > 1$, þá er

$$a^{-\infty} = 0, \quad \cdots\cdot \vartheta,$$

því $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}}$ eptir (226) $= \frac{1}{\infty}$ eptir (231, γ) $= 0$ eptir (73, 6). Ef $a < 1$, þá er

$$a^{-\infty} = \infty \quad \cdots\cdot \iota,$$

er finst með sama hætti eptir (231, δ).

232. Ákvörðun rótar af veldi eptir gefnum vísi, heitir rótarútdráttur (*extractio radicis*), eða að útdraga einhverja rót (*extrahere radicem*). t. a. m.

Ef

$$a^{m} = b \quad \cdots\cdot (\alpha),$$

þá er

$$a = \sqrt[m]{b} \quad \cdots\cdot (\beta).$$

Hèr er b veldið, sem á að sundrast í m jafnstóra gjörendur, og er hèr a einn af þeim. En þetta getur stundum verið á fleiri vegu en einn, sem seinna verður frá skýrt.

Í tölum getur hèr verið $a = 2$, $m = 3$; þá er $b = 8$; þetta er líkingin (α); því $2.2.2 = 8$; þá er og eptir (β) 2 einn af þeim þremur jafnstóru gjöröndum, sem liggja í 8.

þetta $a = \sqrt[m]{b}$ má nú aptur setja inn í (α). þá verður

$$a^m = (\sqrt[m]{b})^m = b \quad \cdots\cdot (\gamma).$$

það er: rótin hafin upp til veldis með rótarvísinum fyrir veldisvísi gefur sama veldi.

Sè nú aptur a^m úr (α) sett inn í (γ) fyrir b, þá er

$$a = \sqrt[m]{a^m} \quad \cdots\cdot (\delta).$$

þegar $m = 2$, skrifast styttra $\sqrt{b}$ fyrir $\sqrt[2]{b}$, eins og í (224), en $\sqrt[1]{b} = b$, þá skrifast ekki $\sqrt[1]{b}$, heldur einungis b.

233. *Exponentar,* bæði velda og róta, geta verið brotnir, og hafa þá allra brota og heilla talna eðli. *Factorarnir* geta þá sundrazt og samansezt, umsnúizt og breytzt alla vega, eins og hverjar aðrar tölur og einingar. þegar *exponent* er brot, verður hans eðli skiljanlegt af eðli (*definition*) *factora* og brota. þannig er að skilja

$$a^{\frac{p}{q}} \quad \cdots\cdot *$$

að það merki, að a skuli setjast $\frac{p}{q}$ sinnum sem *factor*, og það annaðhvort, að til sè p jafnir *factorar* a, sem aptur geti sundrazt í q jafna *factora,* svo að úr hverjum einum af þeim p *factorum* megi taka 1 q^{ta} part; verður þá ætíð hver *factor* $= a^{\frac{1}{q}}$, en tala þeirra p; samber (61) um uppruna brota; ellegar að þeir p *factorar* flokki sig í tvær ójafnra *factora* deildir, að í hinni einu, sem hefir í sèr stærri deildirnar, verði svo margir jafnir *factorar,* sem q er opt innifalið í p, og í hinni, sem hefir minni *factorana,* verði svo margir minni jafnir *factorar,* sem afgangurinn segir, þegar deilt er p með q; ellegar í þriðja lagi, að allar deildirnar verði jafnar, en hafi allar í sèr svo marga af stærri *factorunum,* sem heila tala kvótans ákvarðar og svo eins marga af hinum minni *factorum,* sem afgangur deilingarinnar $\frac{p}{q}$ sundraður með heilu tölunni, ef þarf, ákveður. Dæmi:

$$a^{\frac{13}{5}} = a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}. \qquad (\alpha).$$

Þar nú 5 er tvisvar innifalið í 13, þá má flokka þessa *factora* þannig:

$$a^{\frac{13}{5}} = (a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}})\,(a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}).a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}. \qquad (\beta).$$

Þetta er sama sem

$$a^{\frac{13}{5}} = a^2.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}} = a\,.\,a\,.\,a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{1}{5}} = a^2.a^{\frac{3}{5}} = a^{2\frac{3}{5}} \qquad (\gamma).$$

Nú má skipta þessum $\frac{3}{5}$ í tvo staði og gjöra að $\frac{6}{10}$, með því að lengja brotið $\frac{3}{5}$ með heilu tölunni í kvótanum, sem hèr er *2, og* leggja ofan á hverja einingu í henni, þannig:

$$a^{\frac{13}{5}} = a\,.\,a\,.\,a^{\frac{3}{10}}\,.\,a^{\frac{3}{10}} = (a\,.a^{\frac{3}{10}})(a\,.\,a^{\frac{3}{10}}) = a^{1\frac{3}{10}}\,.\,a^{1\frac{3}{10}} =$$
$$.\,a^{1\frac{3}{10}}\,.\,a^{1\frac{3}{10}} = (a^{1\frac{3}{10}})^2. \qquad \cdots\cdot\ (\delta).$$

Hèr má af (α) sjá, að summa *exponentanna* er $\frac{13}{5}$, og þess vegna jafnt báðum megin við jafnaðarmerkið (53). Eptir (β) sèst, að 5 af þessum jöfnu *factorum* $a^{\frac{1}{5}}$ liggja í stærðinni a, og þess vegna er hver *factor* 5ta rótin af a, samber (224), eða sem hinir gömlu kölluðu *surdesolid*rótina af a, og sem teiknast $\sqrt[5]{a}$. Veldið $a^{\frac{13}{5}}$ er því sama sem $(\sqrt[5]{a})^{13}$. Hèr af sèst þá aptur, að nefnari veldisvísisins er rótarvísir, ef hann er heil tala (rótarvísirinn). Eða með öðrum orðum: Flytja má nefnara veldisvísisins í rótarmerkisklofann, eða eptir (233, *)

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad \cdots\cdot\ (\varepsilon).$$

Vilji eg draga 13dn rót út af $a^{\frac{13}{5}}$, þá er hún $a^{\frac{1}{5}}$, sem sèst af (α). Hana fæ eg af veldisvísinum með því að deila honum með 13, og það gjörist með tvennu móti (98): annaðhvort með því, að deila teljara veldis*exponentsins* með 13; kemur $a^{\frac{1}{5}}$, eins og á að vera; ellegar með því, að láta teljara veldisvísisins halda sèr, en margfalda nefnarann með 13; þetta viljum vèr að eins kunngjöra þannig:

$$\sqrt[13]{a^{\frac{13}{5}}} = a^{\frac{13}{5\cdot 13}} = \sqrt[5\cdot 13]{a^{13}} \qquad \cdots\cdot\ (\zeta),$$

eptir því sem nýlega var sagt, að nefnari veldisvísisins sè rótarvísir (ε). Þetta er nú sama sem $a^{\frac{1}{5}}$ og það aptur sama sem $\sqrt[5]{a}$. Þar nú

$$\sqrt[5\cdot 13]{a^{13}} = \sqrt[5]{a} \quad \ldots\ldots (\eta),$$

þá sjáum vèr, að má stytta veldisvísi og rótarvísi hvorn mót öðrum með sameiginlegum mæli, eins og brot. Hèr er þá

$$\sqrt[\frac{5\cdot 13}{13}]{a^{\frac{13}{13}}} = \sqrt[5]{a} \quad \ldots\ldots (\vartheta).$$

Deilir rótarvísisins er því deilir teljarans í veldisvísinum, ef stærðin á að halda sèr. Það er að skilja: hèr verður að deila rótarvísinum 5 . 13 með 13, og teljaranum í $\frac{13}{1}$ eða veldisvísinum með 13, en hvorttveggja er hèr kunngjört, en ekki framkvæmt. Er þá auðsèð, að úr þessu verður $\sqrt[5]{a}$, því $\frac{13}{13}$ í rótarvísinum er $= \frac{13}{13}$ í veldisvísinum. Látum vèr nú $\frac{5\cdot 13}{13}$ í rótarmerkinu halda sèr, en undanfellum að deila í veldisvísinum og skrifum

$$\sqrt[\frac{5\cdot 13}{13}]{a^{13}} \quad \ldots\ldots (\iota),$$

þá heldur stærðin sèr ekki, heldur *potenserast* með vísinum 13 og verður $\sqrt[5]{a^{13}} = a^{\frac{13}{5}}$, eins og í (α). Þessi stærð haggast ekki, þó vèr tökum burt 13 úr rótarvísisins teljara og 13 úr veldisvísinum, þannig:

$$\sqrt[\frac{5}{13}]{a} = a^{\frac{13}{5}} \quad \ldots\ldots (\varkappa),$$

þar stytta má veldisvísi og rótarvísi hvorn mót öðrum með sameiginlegum mæli eins og brot (η). Hèr sjáum vèr þá: að umsnúa má veldisvísi og gjöra að rótarvísi; einnig umsnúa rótarvísi og gjöra að veldisvísi. Ellegar: að teljari rótarvísis er nefnari veldisvísis, undir eins og nefnari rótarvísis er teljari veldisvísis. Þetta má styttra sanna þannig:

$$(a^{\frac{13}{5}})^{\frac{5}{13}} = a \text{ eptir (130), þá } a^{\frac{13}{5}} = \sqrt[\frac{5}{13}]{a}$$

$$(\sqrt[\frac{5}{13}]{a})^{\frac{5}{13}} = a \text{ eptir (232, γ), þá } \sqrt[\frac{5}{13}]{a} = \sqrt[\frac{5}{13}]{a};$$

$$\text{þar af } \sqrt[\frac{5}{13}]{a} = a^{\frac{13}{5}}.$$

Hèr eru að sönnu *exponentarnir* í tölum, en þeir geta einnig verið bókstafir, þannig:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = a, \text{ eptir (130), þá } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

$$\left(\sqrt[\frac{n}{m}]{a}\right)^{\frac{n}{m}} = a, \text{ eptir } (232, \gamma)\text{; þá } \sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a},$$

$$\text{þar af } \sqrt[\frac{n}{m}]{a} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Þessi sönnun mátti og vera enn styttri, og hafa einungis setningarnar, sem hèr eru vinstra megin, þannig:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = a \quad \text{eptir (130);}$$

$$\left(\sqrt[\frac{n}{m}]{a}\right)^{\frac{n}{m}} = a \quad \text{eptir } (232, \gamma);$$

$$\text{þess vegna } \sqrt[\frac{n}{m}]{a} = a^{\frac{m}{n}} \quad \cdots\cdot (\lambda).$$

Við þessa setningu er samt nokkuð aðgæzluvert, ef a er ekki *positif* stærð, sem síðar mun sagt verða.

234. Nú viljum vèr gjöra oss nokkuð ljósara sumt af því, er vèr hugleiddum í (233). Það er þá fyrst: Dæmið í (233, α) viljum vèr gjöra að fullkomnu talnadæmi, og láta a vera $= 32$. Þá er 5ta rótin þar af $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{32} = 2$, því $2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 32$. Þá er

$$32^{\frac{13}{5}} = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 8192 \cdots\cdot (\alpha)$$

$$32^{\frac{13}{5}} = 32 \,.\, 32 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 1024 \,.\, 8 \qquad (\beta)$$

$$= 32^2 \,.\, 2^3 = 32^{2\frac{3}{5}} = 1024 \,.\, 32^{\frac{3}{5}} \qquad (\gamma)$$

$$= \left(32^{1\frac{3}{10}}\right)^2 = \left(32^{\frac{13}{10}}\right)^2 \cdots\cdot (\delta).$$

Með margföldum hætti má flokka, færa og sundra þessa gjörendur. Svo er einnig eptir (233, λ)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

$$32^{\frac{13}{5}} = \sqrt[\frac{5}{13}]{32}.$$

En hvernig nota megi $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$ höfum vèr enn nú ekki umtalað. það má með tvennum hætti: 1, draga n^{tu} rótina út af a (hún er $a^{\frac{1}{n}}$) og hefja hana upp í m^{ta} veldi; kemur $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$, eins og gjört var í (233, α), og það var hèr langt hægra, vegna þess svo stóð á tölunum; 2, að hefja a, sem hèr er 32, upp í m^{ta} veldi, það er hèr upp í 13^{da} veldi, og draga þar út af n^{tu} rót, sem hèr er hin 5^{ta} eða *surdesolid*rót. Eins og nú stytta má rótarvísi og veldisvísi hvorn mót öðrum, svo má og lengja þá (233, η, ϑ); þess vegna:

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m} \quad \cdots\cdots (\mu).$$

Rótarvísirinn $\frac{n}{m}$ er hèr margfaldaður, með því að taka burt nefnarann m; og veldisvísirinn 1 er margfaldaður með því að setja m í staðinn fyrir 1. Í talnadæmi voru er

$$\sqrt[\frac{5}{13}]{32} = \sqrt[5]{32^{13}}$$

og má lesa $\sqrt[5]{32^{13}}$ á tvo vegu, eins og $32^{\frac{13}{5}}$, annaðhvort að draga skuli 5^{tu} rót af 32, sem er 2, og hefja hana síðan upp í 13^{da} veldi, eins og gjört er í (233, α); fæst þá 8192, eins og hèr (234, α), ellegar hefja 32 upp í 13^{da} veldi, sem er

$$32^{13} = 36893488147419103232$$

og draga hèr út af 5^{tu} rótina, sem er 8192, eins og með hinni aðferðinni.

Þó ekki sè enn búið að sýna, hvernig draga megi út 5^{tu} rót (eða neina rót), þá má þó reyna að hefja 8192 upp í 5^{ta} veldi, og þá munu menn finna

$$8192^5 = 36893488147419103232.$$

Eins og margföldun og deiling er hvor annari gagnstæð, svo er og velda upphafning og rótarútdráttur gagnstæð; og eins og það má vera eptir geðþekkni manns, þegar tala skal bæði margfaldast og deilast, hvort fyrr er gjört eða síðar, að margfalda eða deila henni; eins er það í veldum og rótum hið sama,

hvort fyrr er gjört eða síðar, að hefja töluna til veldis, eða útdraga rótina af henni. Þetta má sjá á undangangandi *formulum* og dæmi.

Af (233, β) og (234, β) má sjá, að kvaðratið af a margfaldað með *cubus* af $a^{\frac{1}{5}}$ gefur sama *product* sem í (α), nefnilega 1024 . 8 = 8192. Þetta er sama sem sýnt er í γ nokkuð í annari mynd. Í δ er $(a^{\frac{13}{10}})^2$ eða $(32^{\frac{13}{10}})^2$ öldungis sama stærðin, því það er $= (32^{\frac{13}{5 \cdot 2}})^2$, því $32^{\frac{13}{5}}$ er sama sem 8192, eins og í (α), en *exponentarnir* $\frac{1}{2}$. 2 ganga upp hvor á móti öðrum, og *product* þeirra verður = 1 eptir (130), svo þar úr verður $8192^1 = 8192$. Hefði nú heila talan í kvótanum $\frac{13}{5}$ verið önnur en 2, svo sem e, þá hefði mátt lengja brotið $\frac{3}{5}$ með e, þá hefði það orðið $\frac{3e}{5e}$; mátti svo sundra það í e staði, þá hefði komið í hvern $\frac{3}{5e}$, sem mátti leggja ofan á hverja einingu í heilu tölu kvótans í *exponentinum*.

235. Athugi. Í undangangandi töluliðum seinustu hefi eg ekki notað bókstafi til sönnunarinnar, hvað *exponentana* snertir, og hefi með vilja í (233, α) látið teljara og nefnara veldisvísisins $\frac{13}{5}$ vera frumtölur, til að sýna, að vèr værum alls ekkert upp á það komnir, að nefnarinn gangi upp í teljaranum, heldur að sömu reglurnar gildi, hvernig sem á tölunum stendur, og það sè óbreytanlegt og eilíft lögmál, sem *exponentarnir* fylgi. Því mèr liggur við að amast við þeirri skoðun og talsháttum, sem nokkrir danskir, þó annars góðir og heiðraðir rithöfundar á fjórða og fimta áratugi þessarar aldar hafa tekið upp á og haldið um stund, að taka það tilfelli út af fyrir sig, þegar nefnari *exponentsins* gengur upp í teljara hans, og sanna það, að *exponenta*reglan þá gildi, en síðan segjast þeir útvíðka hennar gildi til brotinna *exponenta*, þar sem nefnarinn ekki gengur upp í teljaranum, og sanna reglunna þá ekki. Þá segja þeir t. d.: Vèr útvíðkum hèr þannig merkingu veldis, að þar undir skiljist einnig brotin veldi, og

komum oss saman um (»*vedtage*«), að $a^{\frac{n}{m}}$ þýði $\sqrt[m]{a^n}$, *Bergs almindelige Mathematik*, bls. 134. Menn hafa komið sèr saman um (»*man vedtager*«), að láta *formuluna* gilda, *Ramuss elementær Algebra*, bls. 50. Menn hafa komið sèr saman um (»*vedtaget*«), að líkingin $\sqrt[n]{b} = a$, sem vèr höfum sèð að ekki gildir fyrir öll *positif* og *negatif* heil og brotin gildi stærðarinnar b, þegar a skal vera ein af hinum hingað til þektu (útskýrðu) tölum, skuli gilda fyrir öll möguleg, *positif* og *negatif*, heil og brotin gildi stærðarinnar b, *Fallesens Begyndelsesgrunde i den rene Mathematik*, bls. 170. Þessi orðatiltæki þeirra sýnast mèr líta svo út, eins og maðurinn hafi nokkurn hlut að skipa og skikka í stærðanna eilífu lögmálum. En raunar er það ekki meining þeirra; heldur þykjast þeir mega ráða teiknum sínum, og það játa eg þeir megi, svo lengi sem þau ekki fara að ljúga að þeim. Þeir hafa tekið þá aðferð, að útvíðka smámsaman hugmyndir sínar, t. d. þeir kalla fyrst ekki *exponenta*, nema þeir sè *positifir*, síðan ekki *exponenta*, nema þeir sè heilir, og eptir þessum útvíðkunum útvíðka þeir stundum án sönnunar gildi forskripta sinna. En svo farast þeim þannig orð um þetta málefni, eins og það sè *placita* (*Vedtægter*), sem eiga að vera *theoremata* (*Læresætninger*); samber Innganginn í (8, 2, 4). Það sem eg hefi nú hèr um talað, er sama sem í (225) um *exponentinn* núll og hina *negatifu exponenta*, að það er eins og þessir menn hafi (eptir því sem orðatiltækin hljóða) skoðað lærdóminn um *exponentinn* núll, hina *negatifu exponenta*, og nú hina brotnu *exponenta* sem mannasetningar (*placita*, í Innganginum 8, 2). En hèr í (229), þar sem talað er um veldanna raðir samlíktar við götur, er hafi tvenn gatnamótin, sýnist mèr vera röksemd fyrir, að þessir lærdómar sè æðri en mannasetningar.

236. Sèrhver rót af *producti* er jöfn *productinu* af sömu rótum *factoranna*, það er

$$\sqrt[n]{abc\cdots} = (\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{c})\cdots \quad *,$$

$$\text{því } (\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots)^n = (\sqrt[n]{a})^n \,.\, (\sqrt[n]{b})^n \,.\, (\sqrt[n]{c})^n\,,$$

því sèrhver *factor* vinstra megin við jafnaðarmerkið verður að skrifast n sinnum, ef hann á að hefjast upp í n^{ta} veldi, (53, 1).

En þessa skript má stytta með því að skrifa hvern *factor* einu sinni með vísi (53). Þar af kemur hægra megin við jafnaðarmerkið $(\sqrt[n]{a})^n \cdots$ En eptir (232, γ) er þetta sama sem a, þess vegna

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots)^n = (\sqrt[n]{a})^n\,(\sqrt[n]{b})^n\,(\sqrt[n]{c})^n \cdots = abc$$

og þar af

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots) = \sqrt[n]{(abc\cdots)} \qquad \cdots (\alpha)$$

það er: n^{ta} rótin af *producti* abc er jöfn *productinu* af n^{ta} rótum *factoranna*.

Viðbót. Sè allir *factorarnir* $a, b, c, \cdots$ í (α) jafnir, *nefnilega* $a = b = c \cdots$, en væri m að tölu, þá kæmi fram stærðin $\sqrt[n]{a^m}$ og líkingin

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \cdots (\beta).$$

Þetta er því sama stærðin, sem vèr fundum áður í (234, μ) og þess vegna er

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[\frac{n}{m}]{a} \qquad \cdots (\gamma).$$

237. Þessi reikningsforskript (236, *) gefur merkilega reglu bæði í talna og bókstafareikningi til að stytta fyrir sèr táknanir rótaútdrátta, og er hún í talnareikningi þessi:

Leysa skal tölurnar upp í frumgjörendur ásamt *exponentum* þeirra (113), *dividera* svo veldis*exponenti* sèrhvers frumgjöranda með rótarvísinum; setja frumgjörandann sem *factor* fyrir framan rótarmerkið með veldisvísi, sem er = kvótanum; og eptir (undir) rótarmerkið með *exponenti* = afganginum. Sè þá fleiri liðir, sem geta fengið sömu rót fyrir *factor*, þá má flytja þá liði saman, er hana hafa, loka inn í sviga, og hina sameiginlegu rót skrifa fyrir utan svigana eins og sameiginlegan *factor*. Samber (49) skýringuna, og (50). Dæmi:

1. $\sqrt{75} = \sqrt{3\,.\,5^2} = \sqrt{3^{2\cdot 0+1}\,.\,5^{2\cdot 1+0}}$.

Hinn fyrri liður *exponentsins* er hèr *product* deilis og kvóta, en hinn síðari er afgangurinn. Kvótinn 0 og afgangur 1 segja, að 3 eigi ekki að skrifast vinstra megin við rótarmerkið, því það er $3^0 = 1$, heldur hægra megin, því það er $3^1 = 3$. Kvótinn 1 og afgangurinn 0 við 5 segir, að 5 eigi að skrifast vinstra meg-

in, því það er 5^1, en ekki hægra megin, því þar er $5^0 = 1$, þess vegna

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \,.\, 5^2} = 5\sqrt{3}.$$

Með sama hætti er:

$$2. \qquad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \,.\, 3^3} = \sqrt[3]{2^{3.0+1} .\, 3^{3.1+0}} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Enn framar:

$$\begin{aligned} 3. \quad \sqrt{80} + \sqrt{245} &= \sqrt{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5} + \sqrt{5 \,.\, 7 \,.\, 7} \\ &= \sqrt{2^4 \,.\, 5} + \sqrt{5 \,.\, 7^2} \\ &= \sqrt{2^{2.2+0} .\, 5^{2.0+1}} + \sqrt{5^{2.0+1} .\, 7^{2.1+0}} \\ &= 2^2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 11\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Sömuleiðis:

$$\begin{aligned} 4. \; \sqrt{216} = \sqrt{2.2.2.3.3.3} = \sqrt{2^3 .\, 3^3} &= \sqrt{2^{2.1+1} .\, 3^{2.1+1}} \\ &= 2.3\sqrt{2 \,.\, 3} \\ &= 6\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Sè það bókstafir, sem menn hafa við að sýsla, má hafa sömu reglu, svo sem:

$$5. \qquad \sqrt[3]{a^4b^3} = \sqrt[3]{a^{3.1+1} .\, b^{3.1+0}} = ab\sqrt[3]{a}.$$

Þessu líkt er:

$$\begin{aligned} 6. \quad \sqrt[3]{16a^3b} = \sqrt[3]{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2a^3b} &= \sqrt[3]{2^4a^3b} \\ &= \sqrt[3]{2^{3.1+1}a^{3.1+0}b^{3.0+1}} \\ &= 2a\sqrt[3]{2b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad \sqrt[7]{a^{11}b^{16}c^{24}d^{36}} &= \sqrt[7]{a^{7.1+4}b^{7.2+2}c^{7.3+3}d^{7.5+1}} \\ &= ab^2c^3d^5\sqrt[7]{a^4b^2c^3d}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad \sqrt[m]{a^{3m+2}b^{pm+1}c^{5m+q}} &= \sqrt[m]{a^{m.3+2}b^{mp+1}c^{m.5+q}} \\ &= a^3b^pc^5\sqrt[m]{a^2bc^q}. \end{aligned}$$

$$9.\ \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b^4} = \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2^{3.0+1}a^{3.2+0}b^{3.1+1}} = \frac{5c}{ad}a^2b\sqrt[3]{2b}$$

$$= \frac{5c}{d}ab\sqrt[3]{2b} = \frac{5abc}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

238. Eins og má eptir (237) flytja *factora*, sem eru undir rótarmerkinu, út fyrir það, með því að útdraga rót þá, er rótarvísirinn segir til; svo má og þvert á mót flytja *factor*, sem stendur fyrir utan rótarmerkið, inn fyrir það, með því að *potensera factorinn* eptir þeim vísi, er rótarmerkið hefir. Þannig verður í fyrsta dæminu (237), ef færa skal 5 inn undir rótarmerkið í stærðinni $5\sqrt{3}$, að kvaðrera 5; kemur $\sqrt{3.25} = \sqrt{75}$. Sömuleiðis í 5ta dæminu, ef færa skal a inn fyrir rótarmerkið, að *cubera a;* kemur $b\sqrt[3]{aa^3} = b\sqrt[3]{a^4}$.

239. Skuli draga rót einhverja út af almennu broti, þá gjörist það með því, að draga rótina út af teljaranum og rótina út af nefnaranum, og skrifa þær rætur í teljara og nefnara stað, nefnilega:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \ldots. *$$

því $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$ eptir (95, 3), sem er margföldun brots með broti. En

$$\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} \quad (232,\ \gamma).$$

Stundum verður þessi aðferð ekki hin auðveldasta, heldur verður hægra að margfálda fyrst teljara og nefnara með *factorum* nefnarans, upphöfðum í svo hátt veldi, að hver þeirra fái í nefnaranum sama veldisvísi, sem er = rótarvísirinn, og draga síðan út rótina, eins og hèr segir,. og skrifa rótarmerkið með sínum vísi einungis í teljarann, en í nefnara stað *factora* hins nýja nefnara einungis í fyrsta veldi, t. d.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{bc^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2c}{bc^2b^2c}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2c}{b^3c^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2c}}{bc}$$

þetta er grundvallað á því, að gildi brots ekki breytist, þó það sè lengt.

240. Sè rótarvísirinn samsett tala, má draga út rótina fyrir hvern rótarvísis-*factor* sèr í lagi, svo:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} \quad \ldots\ast,$$

því

$$\sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}} \quad \text{eptir (233, ε)}$$

$$= a^{\frac{1}{nm}} \quad \text{eptir (46)}$$

$$= a^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Dæmi: $\sqrt[4]{256} = \sqrt[2\cdot2]{256} = \sqrt{\sqrt{256}}$;

$\sqrt{256} = 16$, því $16 . 16 = 256$;

$\sqrt{16} = 4$, því $4 . 4 = 16$;

þá $4 . 4 . 4 . 4 = 256$ og $\sqrt[4]{256} = 4$.

241. Þegar rót skal útdragast af veldi, og rótarvísirinn og veldisvísirinn hafa sameiginlegan mæli, má burtdeila þessum mæli, svo hann hverfi, eða

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (\alpha).$$

Hèr er p sameiginlegur mælir; samber (233, η, ϑ), og ef rótarvísirinn er gjörður að nefnara veldisvísisins, kemur brotið $\frac{mp}{np}$, sem má stytta með p, svo $\frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$. Nú má flytja n aptur í rótarmerkisklofann, kemur þá $\sqrt[n]{a^m}$, eins og áður er sagt,

Merk: Í (233, ϑ) er að sönnu um þenna sameiginlega mæli rótarvísis og veldisvísis talað. En oss þykir ekki *formulan* þar

svo fullkomin og glögg, sem vèr vildum hafa hana. þess vegna viljum vèr bæta verk vor með þessum tölulið.

Eins og má stytta rótarvísi og veldisvísi hvorn á móti og öðrum, svo má og lengja þá; og er þess líka getið (233). En hèr út af leiðist aptur mjög áríðandi regla til að gjöra rætur af ýmsum stigum samnefndar. Setjum, að þær væri

$$\sqrt[m]{a^n} \text{ og } \sqrt[p]{a^q}.$$

þessar stærðir má skrifa með brotnum *exponentum:*

$$a^{\frac{n}{m}} \text{ og } a^{\frac{q}{p}}.$$

Brot þessi má nú gjöra samnefnd $\frac{np}{mp}$ og $\frac{mq}{mp}$, þá verða stærðirnar

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[m]{a^n} &= a^{\frac{np}{mq}} = \sqrt[mp]{a^{np}} \\ \sqrt[p]{a^q} &= a^{\frac{mq}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{mq}} \end{aligned}\right\} \quad (\beta).$$

Skuli nú þessar stærðir margfaldast saman, þá á að leggja saman *exponentana* (53); þá verður

$$\sqrt[m]{a^n} \,.\, \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{np+mq}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{np+mq}} \quad (\gamma).$$

Setjum t. d. $a = 4$, $m = 1$, $p = 2$, $n = 3$, $q = 5$, sem skrifast má styttra þannig.

$$\begin{array}{ccccc} a, & m, & p, & n, & q, \\ 4, & 1, & 2, & 3, & 5, \end{array}$$

þá er

$$\sqrt[1]{4^3} \,.\, \sqrt[2]{4^5} = 4^3\sqrt{4^5} = 64 \,.\, 32 = 2048$$

$$\sqrt[1\cdot2]{4^{3\cdot2+1\cdot5}} = \sqrt{4^{6+5}} = \sqrt{4^{11}} = \sqrt{4194304} = 2048.$$

þó ekki sè hèr búið að sýna kvaðratrótar útdrátt, þá má þó með margföldun reyna að kvaðrera 2048. Um $\sqrt[1]{}$ og $\sqrt[2]{}$ er talað í (232) seinast.

Skuli deila þessum stærðum, einni með annari, þá er það að mestu eins, þannig:

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[p]{a^q}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{q}{p}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{q}{p}} = a^{\frac{np}{mp}-\frac{mq}{mp}} = a^{\frac{np-mq}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{np-mq}} =$$

$$\frac{1}{a^{\frac{mq-np}{mp}}} = \frac{1}{\sqrt[mp]{a^{mq-np}}} \quad \ldots\ldots(\delta).$$

Gangi rótarvísir og veldisvísir, sá eini upp í öðrum, þá má stytta þannig:

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m \quad \ldots\ldots(\varepsilon)$$

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a} \quad \ldots\ldots(\zeta).$$

Hin fyrri gefur við styttingu með n $\sqrt[1]{a^m} = a^m$, sjá (232) seinast, og hin síðari sömuleiðis $\sqrt[m]{a^1} = \sqrt[m]{a}$, þar veldis*exponentinn* 1 skrifast ekki.

Negatifum rótarvísi við stærðina a má snúa í *positifan*, með því að setja $\frac{1}{a}$ fyrir a, þannig:

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \quad \ldots\ldots(\eta)$$

því

$$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

þess vegna

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

þetta má langtum skemur sanna þannig:

$$\sqrt[-n.-1]{a^{1.-1}} = \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}},$$

með því að margfalda bæði rótarvísinn og veldisvísinn með -1 eptir (241, α), þegar $p = -1$.

242. Að útvega ýmsum rótarstærðum sameiginlegan rótarvísi. Margfalda sèrhvern rótarvísi með *producti* hinna annara,

og *potensera* síðan stærðirnar undir rótarmerkjunum með þeim vísi, sem jafn er þessu *producti*.

Dæmi: $\sqrt[m]{a^p}$ og $\sqrt[n]{a^q}$. Hvað áhrærir $\sqrt[m]{a^p}$ þá er að álíta *n* sem *product* hinna annara rótar*exponenta*, þar stærðirnar eru einungis tvær; þess vegna verður $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$. Með sama hætti verður $\sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{qm}}$. Þetta grundvallast á (241, α).

Hafi rótar*exponentarnir* sameiginlegan *factor*, þá verður hinn sameiginlegi rótar*exponent* = rótar*exponentanna* minsta samdeilanda (89).

Rótarstærðirnar sè: $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{5b}$ og $\sqrt[8]{b^3}$.

$$2) \frac{4 \quad 6 \quad 8}{3 \quad 4} \qquad \text{Minsti samdeilandi 24.}$$

$$\sqrt[4 \cdot 6]{a^{1 \cdot 6}},\ \sqrt[6 \cdot 4]{5^4 b^4},\ \sqrt[8 \cdot 3]{b^{3 \cdot 3}}$$

$$= \sqrt[24]{a^6}\quad \sqrt[24]{5^4 b^4},\ \sqrt[24]{b^9} \qquad \text{Samber (241, } \alpha\text{).}$$

243. Hinum 4 höfuðgreinum *addition*, *subtraction*, *multiplication* og *division* má beita við rótarstærðir.

Til að *addera* eða *subtrahera* rótarstærðir, verður að *addera* eða *subtrahera* *coefficienta* þeirra, og *multiplicera* hið útkomanda með hinni sameiginlegu rótarstærð.

Dæmi: $5\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{b} = 7\sqrt[3]{b}$.

Stundum verður að leysa tölurnar undir rótarmerkinu upp í gjörendur, til þess að ræturnar verði samkynja, t. d.

$$2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} = 2\sqrt{9 \,.\, 3} - 3\sqrt{4 \,.\, 3} = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 0.$$

Sè rótarstærðirnar, sem eiga að *adderast* eða *subtraherast*, ekki samkynja og verða ekki gjörðar það, þá verður ekki annað gjört, en kunngjöra athafnirnar með + og —.

Skuli margfalda rótarstærðir, er hafa sama rótarvísi, þá margfaldast stærðirnar undir rótarmerkinu saman, og setjast undir hið sameiginlega rótarmerki. Hafi rótarstærðirnar *coefficienta* fyrir framan rótarmerkin, þá margfaldast þeir saman út af fyrir sig (241, β, γ), t. d. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$

$$\begin{array}{l} a + \sqrt{b} \\ a - \sqrt{b} \\ \hline a^2 + a\sqrt{b} \\ \quad - a\sqrt{b} - b \\ \hline a^2 - b. \end{array}$$

Hèr er $\sqrt{b}$ margfaldað með $\sqrt{b}$, það gefur eptir reglunni $\sqrt{b^2} = b$, því væri það skrifað með veldisvísi, þá væri það $b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = b$. En $-$ kemur fyrir framan, þar $+\sqrt{b} \times -\sqrt{b}$ eru ólík merki. Hafi rótarstærðirnar ýmislegan vísi, verður fyrst að útvega þeim sameiginlegan vísi, eptir (242).

Skuli deila rótarstærðum, þá ef rótarvísirinn er hinn sami í deili og deilanda, gildir *formulan*

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

eptir (239, *). En sè rótarvísirinn ekki hinn sami, verður fyrst að útvega rótarstærðunum sama rótarvísi, samber (241, δ).

244. Brot, sem hafa rótarstærð í nefnaranum, geta opt ummyndazt í önnur, sem einungis hafa hana í teljaranum. Við það verða brotin opt hægri í meðferðinni, t. d. $\frac{3}{2\sqrt{5}}$; margfalda með $\sqrt{5}$ teljara og nefnara, kemur $\frac{3\sqrt{5}}{2\,.\,5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$. Hèr má setja 3 inn undir rótarmerkið, kemur $\frac{\sqrt{9\,.\,5}}{10} = \frac{\sqrt{45}}{10} = 10^{-1}\sqrt{45} = \sqrt{10^{-2}\,.\,45} = \sqrt{\tfrac{45}{100}} = \sqrt{0{,}45}$.

Hafi brotin þessa mynd:

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}} \text{ eða } \frac{a}{p-\sqrt{q}},$$

þá má margfalda fyrra brotið í teljara og nefnara með $p - \sqrt{q}$, en hið síðara með $p + \sqrt{q}$, því eptir (54, *D*) koma þá tvö kvaðröt af liðunum p og $\sqrt{q}$ með $-$ á milli í nefnaranum, þannig:

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}} = \frac{a(p-\sqrt{q})}{(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})} = \frac{ap-a\sqrt{q}}{p^2-q} \qquad (\alpha)$$

og
$$\frac{a}{p-\sqrt{q}} = \frac{a(p+\sqrt{q})}{(p-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})} = \frac{ap+a\sqrt{q}}{p^2-q} \qquad (\beta).$$

Með líkum hætti er

$$\frac{a}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \frac{a(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2-(\sqrt{q})^2} = \frac{a\sqrt{p}-a\sqrt{q}}{p-q} \quad (\gamma)$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} = \frac{a(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2-(\sqrt{q})^2} = \frac{a\sqrt{p}+a\sqrt{q}}{p-q} \quad (\delta).$$

Þó að fleiri liðir sè í nefnaranum, þá má hafa sömu aðferð t. d.

$$\frac{a}{\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$

með því að margfalda með $\sqrt{n}+\sqrt{p}-\sqrt{q}$. Til þess má nota *formuluna* (α), ef maður hefir hana fyrir sèr, og setja p í henni $= \sqrt{n}+\sqrt{p}$ í þessari stærð; kemur þá

$$\frac{a\sqrt{n}+a\sqrt{p}-a\sqrt{q}}{(\sqrt{n}+\sqrt{p})^2-q}.$$

En $(\sqrt{n}+\sqrt{p})^2 = n+2\sqrt{n}\,.\,\sqrt{p}+p$ eptir (54, A) $= n+2\sqrt{np}+p = n+p+2\sqrt{np}$, þá verður nefnarinn $n+p-q+2\sqrt{np}$, því það er bezt að láta $2\sqrt{np}$ vera seinast. Brotið verður þá:

$$\frac{a(\sqrt{n}+\sqrt{p}-\sqrt{q})}{n+p-q+2\sqrt{np}}.$$

Síðan yrkja menn upp á nýjan stofn til að burtrýma $2\sqrt{np}$ úr nefnaranum, með því að margfalda teljara og nefnara með $n+p-q-2\sqrt{np}$, og við þetta fer rótarstærðin algjörlega upp í teljarann.

245. $\sqrt[0]{1}$ er óákvörðuð stærð, því $a^0 = 1$, og merkir þá a allar tölur; dragi eg 0tu rót út báðum megin, kemur

$$a = \sqrt[0]{1};$$

er þá a óákvarðað, eins og áður, og $\sqrt[0]{1}$ óákvarðað. Þetta má einnig skoða þannig:

$$\sqrt[0]{1} = \sqrt[\frac{0}{1}]{1} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = \textit{indeterminato} \ (231, \eta).$$

$\sqrt[0]{a} = \sqrt[\frac{0}{1}]{a} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty}$. Sè nú $a > 1$, þá er $a^{\infty} = \infty$. Sè $a < 1$, þá $a^{\infty} = 0$ (231, γ, δ). Þess vegna $\sqrt[0]{a}$ annaðhvort ∞ eða 0; en sè $a = 1$, þá er $\sqrt[0]{a} = \sqrt[0]{1}$ *indeterminatum.*

246. Sè rót heillar tölu ekki heil tala, þá er hún ekki

heldur brot, sem með endanlegum tölum verði framsett. (Þannig orðar prófessor Ursin þetta *theorema*). Eða sè $\sqrt[n]{a}$ ekki heil tala, þá er hún ekki $= \frac{p}{q}$, þannig að p og q sè heilar tölur. Vèr megum gjöra ráð fyrir, að $\frac{p}{q}$ sè óstyttanlegt, því hefði p og q sameiginlegan mæli, þá mætti stytta brotið með honum. Af þessu leiddi

$$a = \frac{p^n}{q^n}.$$

Þá getur q^n ekki gengið upp í p^n, þar allir frumgjörendurnir eru ósameiginlegir (128), (134), (135). En þrátt fyrir þetta er heimtað, að $\frac{p^n}{q^n}$ sè heil tala, þegar það skal vera $= a$, sem gefið er að sè heil tala. En með einu móti er þetta þó mögulegt, nefnilega ef tölurnar hafa óendanlegan stafafjölda, því þá er horfinn allur mismunur heilla talna og blandinna og þess vegna allur mismunur mælingar og mælingarleysis. Hèr af leiðir aptur að vèr ekki getum framsett slíkar rætur nema með ónákvæmum brotum eða ónákvæmum tugabrotum ellegar afkubbuðum *periodiskum* keðjubrotum eða óendanlegum *series*. Svo má jafnvel að orði kveða, að tugabrot með óendanlegum stafafjölda sè nokkurs konar óendanlegar *series*, þó ekki sè hægt að sjá lögmál þeirra. En það er bót í máli, að menn geta minkað skakkann sem menn vilja og ætíð fundið hans takmörk, t. d.

$$\sqrt{5} = 2{,}2360679774997 + \cdots\cdots\cdot$$

skakkar ekki um 1 tíubillíónasta part. Kvaðratið af þèssu broti, eins og það er hèr, er < 5, en sè fyrir seinasta stafinn 7 sett 8, þá verður kvaðratið > 5. Sama er að segja um alla stafina í þessari blöndnu tölu, sè hann aukinn um 1.

247. Stærðir, sem eru *positifar* eða *negatifar* og geta setzt í brotlíkið $\frac{p}{q}$, þannig að p og q sè heilar tölur, kallast *rationales* (fullmældar), af því þær fullmælast af einingunni eða hennar pörtum; þær kallast einnig *commensurabiles* einingunni. Þar á mót kallast þær stærðir *irrationales* (ófullmældar), sem ekki verða settar í nákvæmt brotlíki. Þessar kallast einnig *incommensurabiles* (ósammældar einingunni). Það er auðsætt, að allar

heilar tölur eru *rationalar*, því þar er $q = 1$. Hin *rationala* stærð $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}$ mælist með $\frac{1}{q}$, sem er p sinnum innifalið í *rationölu* stærðinni, en $1 = q \cdot \frac{1}{q}$ og $\frac{1}{q}$ er q sinnum fólginn í einingunni. Bæði $\sqrt[n]{a}$, þegar a er ekki veldistala n^{ta} stigs, eins og $\sqrt[n]{5}$ í (246), einnig $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, þegar a og b ekki eru veldistölur n^{ta} stigs, eru *irrationalar*, svo sem $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Sè þar á móti a og b veldistölur n^{ta} stigs, þá kallast hið óstyttanlega brot $\frac{a}{b}$ brotin veldistala n^{ta} stigs, svo sem $\frac{4}{9}$ er brotin veldistala annars stigs, því $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

248. Þar rót heillar tölu $N = a^n$ ekki getur verið endanlegt brot (246) útheimtir nákvæmur rótarútdráttur, að þar sè önnur heil tala a, sem upphafin til n^{ta} veldis sè $= N = a^n$, eða að N uppleyst í sína frumgjörendur sè með útlitinu

$$N = a^n = p_1^{n\beta_1} p_2^{n\beta_2} p_3^{n\beta_3} \cdots \quad \text{samber (130).}$$

Verður þá n^{ta} rótin:

$$a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \quad \cdots \qquad (\alpha).$$

Það verður því ekki útdregin nákvæmlega kvaðratrót af öðrum *positifum* heilum tölum en þeim, sem eru í þessari röð:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ \cdots\cdots$$

eða

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ \cdots\cdots \qquad (\beta);$$

eru þá kvaðratræturnar þessar ········

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 7,\ \pm 8\ \cdots\cdots \qquad (\gamma).$$

Eins verður ekki útdregin kúbíkrót nákvæmlega af öðrum *positifum* heilum tölum en þeim í þessari röð:

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 6^3,\ \cdots\cdots$$

eða

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ \cdots\cdots \qquad (\delta).$$

Kúbíkræturnar eru þá

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots \qquad (\varepsilon).$$

Yfir höfuð verður ekki útdregin n^{ta} rót nákvæmlega af öðrum *positifum* heilum tölum en þeim, sem eru í þessari röð:

$$1^n\ \ 2^n\ \ 3^n\ \ 4^n\ \ 5^n\ \ 6^n\ \cdots\cdots \qquad (\zeta);$$

n^{tu} ræturnar eru þá, ef n er jöfn tala:

$$\pm 1 \ \pm 2 \ \pm 3 \ \pm 4 \ \pm 5 \ \pm 6 \cdots\cdots \qquad (\eta);$$

en sè n oddatala, þá eru þær

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \cdots\cdots \qquad (\vartheta).$$

Ef nefnilega n er jöfn tala, þá eru n^{tu} ræturnar tvær af sömu tölunni, samber (γ) og (η), sú eina *positif* og hin önnur *negatif*, t. d. ef $n = 2$ ræturnar af $5^n = 5^2 = 25$ eru þessar:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{25} = +\ 5, \text{ því } +\ 5 \times +\ 5 = +\ 25 \\ \sqrt{25} = -\ 5, \text{ því } -\ 5 \times -\ 5 = +\ 25.\end{array}\right. \qquad (\iota).$$

Sè $n = 4$, sem einnig er jöfn tala, þá er t. d.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{1296} = +6, \text{ því } +6 \times +6 \times +6 \times +6 = +1296 \\ \sqrt[4]{1296} = -6, \text{ því } -6 \times -6 \times -6 \times -6 = +1296\end{array}\right\} \quad (\varkappa).$$

þetta leiðir af (53), þar sem lík merki í *multiplicator* og *multiplicandus* gefa + í *productið*, hvort sem þau eru + eða —, þess vegna verða kvaðratræturnar tvær: sú eina af tveimur *plusum*, og hin önnur af tveimur *minusum*. En kvaðratið verður í báðum tilfellunum *positift*, og *exponent* kvaðratsins er 2, sem er jöfn tala $= n$. Í 3ja veldi er *exponentinn* $n = 3$, þar eru því 3 *factorar*. Hinir fyrstu tveir gefa +, hvort sem rótin hefir verið *positif* eða *negatif*. þegar nú þetta *positifa product* á aptur að margfaldast með rótinni, þá koma þar lík merki, ef rótin hefir haft +, en ólík merki, ef hún hefir haft —; hið þriðja veldi fær því ætíð sama merki sem rótin; þar af leiðir aptur, að rótin hefir sama merki sem veldið. Rótin verður þar því ekki nema ein; samber (ε) og (ϑ).

Yfir höfuð, þegar *exponentinn* n er jöfn tala $= 2m$, þar sem m er heil tala, verður, þegar rótin er *negatif:*

$$(-x)^{2m} = x^{2m} \qquad (\lambda);$$

þar á móti, þegar n er oddatala $= 2m+1$, verður

$$(-x)^{2m+1} = -\ x^{2m+1} \qquad (\mu).$$

Af þessu leiðir, að $\sqrt[2m]{a}$ hefir tvöfalt gildi, það er að skilja, að ræturnar eru tvær (verulegar), hin eina með merkinu +, og hin önnur með merkinu —, hin *positifa potenserast* þannig:

$$(+\ x)^{2m} = x^{2m} \qquad (\nu),$$

en hin *negatifa,* eins og áður er sagt í (λ), svo að þegar a eða

veldið er *positift*, hefir rótin $\pm x$ bæði *positifa* og *negatifa* merkingu, þegar *exponentinn* er $= 2m$; en að tölunni eru þær þó jafnar, nefnilega báðar $= x$. T. d. $\sqrt{1} = \pm 1$, samber (γ), það er $\sqrt{1} = + 1$ og $- 1$; $\sqrt{4} = \pm 2$, það er $+ 2$ og $- 2$, samber (γ); sömuleiðis $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, samber (ζ) og (η), því $(\pm 2)^n = (\pm 2)^4 = (\pm 2)^{2m} = (\pm 2)^{2 \cdot 2} = + 16$ eða $2 . 2 . 2 . 2 = + 16$ og $- 2 . - 2 = + 4$ og $+ 4 . - 2 = - 8$; og $- 8 . - 2 = + 16$, svo $\sqrt[4]{16}$ er bæði $+ 2$ og $- 2$, eða ± 2, samber (η). Þar á móti verður:

$$\sqrt[2m+1]{a} \qquad (\xi)$$

ekki nema ein (veruleg), og það annaðhvort *positif* eða *negatif*, eptir því hvort a er *positif* eða *negatif*. Hingað til höfum vèr að eins lítið skoðað það tilfelli, þegar a er *negatift*, því vèr höfum að eins sagt um 3ja veldi, að rótin fengi þar sama merki sem veldið, eins og (μ) sýnir, t. d. $\sqrt[3]{1} = + 1$, $\sqrt[3]{- 1} = - 1$, $\sqrt[3]{125} = + 5$, samber (ε), og $\sqrt[3]{-125} = - 5$, því $- 5 . - 5 . - 5 = - 125$; $\sqrt[5]{-32} = - 2$. Slíkar stærðir, sem hafa verulegt tölugildi með $+$ eða $-$ merki, kallast *reales* (verulegar). Þar á móti geta $\sqrt[2m]{a}$, þegar a er *negatif*, ómögulega ákvarðast með einni tölu, vegna þess engin tala verður upphafin í $2m$ta veldi, þannig að útkomi *negatif* tala. Þessar stærðir, ef stærðir skal kalla, sem ekki eru *realar*, kallast *imaginariæ* (ímyndaðar), t. d. $\sqrt{-1}$. Því það er ómögulegt að finna þá tölu, sem kvaðreruð gefi $- 1$. Hvaða tala sem tekin er og kvaðreruð, hvort sem hún er *positif* eða *negatif*, þá gefur hún $+$ eptir (λ). En sè hún 0, þá kemur 0 í kvaðratið, og sè hún ∞, þá kemur $\infty^2 = \infty$ í kvaðratið. Eptir (232, γ) er $(\sqrt[m]{b})^m = b$, þess vegna

$$(\sqrt{-1})^2 = -1 \quad \cdots\cdot (o),$$

þá

$$(\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = -1 \quad \cdots\cdot (\pi),$$

einnig

$$-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -1 \quad (\rho),$$

vegna þess — og — fyrir framan $\sqrt{}$ eru lík merki og gefa því $+$, sem lætur — merkið í (π) halda sèr; verður því kvaðratið eins og í (π) $= -1$. Þar á móti, ef margfaldað er saman

$$\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = +1 \quad \cdots\cdot (\sigma),$$

þá er $+$ og — fyrir framan $\sqrt{}$ ólík merki, og gefa —, og þetta — snýr við merkinu í -1 í (π), svo það verður $+1$.

249. Athugagrein. Í tilliti til (o) og (π) í (248) kynni einhver hugsa, að kynni vera

$$(\sqrt{-1})^2 = +1$$

eptir reglunni (243) til að margfalda rótarstærðir, þar svo segir: að margfalda skuli saman stærðirnar undir rótarmerkinu, og setja þær síðan undir hið sameiginlega rótarmerki. Þá kynni einhver fara svo að:

$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1}) \,.\, (\sqrt{-1}) = \sqrt{+1},$$

þar — margfaldað með — gefur $+$ (53). En þessi efasemd hverfur þannig: Þegar nú skal aptur samkvæmt rótarmerkinu útdraga rótina af $+1$, þá eru þar tvær kvaðratrætur, hin eina með $+$ og hin önnur með —, eptir (248, γ); kemur þá til skoðunar, hverja þeirra skuli taka. Taki eg $+$, þá er

$$\sqrt{+1} = +1 \qquad (248, \gamma);$$

þá ætti að vera

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1} = +1;$$

kvaðratrótin af þessu væri þá:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{+1}$$

$$\sqrt{+1} = \pm 1 \qquad (248, \gamma);$$

þá

$$\sqrt{-1} = \pm 1.$$

Ætti nú að kvaðrera þetta aptur, þá yrði með því að varpa burt rótarmerkinu vinstra megin, og er sú burtvörpun kvaðrering, en kvaðrera hægra megin með margföldun

$$-1 = +1,$$

sem er ósannlegt (*absurdum*). Hin *positifa* rót getur hèr því ekki staðizt. Vèr tökum þá hina *negatifu;* þá er

$$\sqrt{+1} = -1 \qquad \cdots (248,\ \gamma),$$

og þá er kvaðratið:

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1} = -1.$$

Að þetta sè rètt, sèst á sjálfri spurningunni: Hvert er kvaðratið af kvaðratrótinni af — 1? því svarið liggur í sjálfri spurningunni, líkt og í þessari spurningu: Hver var faðir hans Jafets Nóasonar?

250. Vèr höfum sèð, að $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Veldin af $\sqrt{-1}$ eru þá þessi:

$(\sqrt{-1})^0 = +1.$ Sjá (121), (225, 2).

$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}.$

$(\sqrt{-1})^2 = -1.$

$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$, því $-1\ .\ \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$

$(\sqrt{-1})^4 = +1$, því $(\sqrt{-1})^2\ .\ (\sqrt{-1})^2 = -1\ .\ -1 = +1.$

$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$, því $+1\ .\ \sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$

$(\sqrt{-1})^6 = -1$, því $(-\sqrt{-1})\ (-\sqrt{-1}) = +1\ .\ -1 = -1.$

Þessi veldi má og eptir venjulegum hætti finna með því að margfalda hvert næstundanganganda með $\sqrt{-1}$, og koma þau þá aptur og aptur hin sömu án afláts í fjórliðuðum umferðum; teljum vèr umferðirnar með m, og látum röð þeirra byrja á 0, þannig:

$$m = 0 \left\{\begin{array}{ll}
(\sqrt{-1})^0 = (\sqrt{-1})^{4m+0} = +1 & (\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^1 = (\sqrt{-1})^{4m+1} = +1\ .\ \sqrt{-1} = \sqrt{-1} & (\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^{4m+2} = +1\ .\ -1 = -1 & (\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^{4m+3} = -1\ .\ \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} & (\sqrt{-1}
\end{array}\right.$$

$$m = 1 \left\{\begin{array}{ll}
(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^{4m+0} = -1\ .\ -1 = +1 & (\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^{4m+1} = +1\ .\ \sqrt{-1} = \sqrt{-1} & (\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^{4m+2} = \sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1} = -1 & (\sqrt{-1} \\
(\sqrt{-1})^7 = (\sqrt{-1})^{4m+3} = -1\ .\ \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}. &
\end{array}\right.$$

Þannig er endalaust áframhaldið með *exponentana* og veldin, þegar $m = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \cdots$

Til að finna m, má deila *exponentinum* með 4, heila talan í kvótanum segir m, leifarnar verða þá 0, 1, 2, 3, og þetta upp aptur og aptur. Sè þá leifin jöfn tala, 0 eða 2, þá er veldið verulegt (*realt*), nefnilega $+1$ við 0, og -1 við 2. Sè leifin ójöfn tala 1 eða 3, þá er veldið ímyndað eða stærðarímynd (*imaginært*), nefnilega $+\sqrt{-1}$ við 1, en $-\sqrt{-1}$ við 3. Þessa reglu er gott að hugfesta, t. a. m.: Hvernig er 10da veldið eða $(\sqrt{-1})^{10}$? Svar 4 í 10 er 2svar, og 2 afgangs; þess vegna

$$(\sqrt{-1})^{10} = -1.$$

251. Eining sú, sem ímynduðu stærðirnar telja, er $\sqrt{-1}$, og þó að þær komi fyrir í annari mynd, má umskapa þær svo, að $\sqrt{-1}$ verði *factor* þeirra; þá verður sú stærð, sem $\sqrt{-1}$ er margfölduð með, að *coefficient* stærðarinnar $\sqrt{-1}$, t. d. $\sqrt{-a}$ er $= \sqrt{+a.-1} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$. Hèr er $\sqrt{a}$ *real* stærð og *coefficient imaginæræ* stærðarinnar $\sqrt{-1}$. Þessi *coefficient* er þá tala sú, sem telur, hvað opt tekin er ímyndaða einingin $\sqrt{-1}$. Í þessum skilningi má kalla ímynduðu stærðirnar stærðir og tölur, sem telja $\sqrt{-1}$, sem sjálft er alls engin tala, heldur *formula*, sem krefur tölu, sem alls ekki er til, nema í veröld ímyndananna. Þess vegna eru ímynduðu stærðirnar fyrr og síðar kallaðar *imaginariu*, og mótsettar hinum *reölu* eða verulegu. Ímynduðu stærðirnar hafa einnig opt verið kallaðar ómögulegar stærðir, þó menn nú á dögum amist við því nafni. Þegar þær framkoma í reikningum, tákna þær tilveruleysi stærða, eins og í boglínufræðinni má finna ótöluleg dæmi til; en þegar menn sjálfir innfæra þær í reikningsforskriptir, geta menn látið þær vinna upp hver aðra, að ekki verði annað eptir, en verulegar stærðir eins og í *trigonometriæ*. Þær hverfa einnig með því að verða *realar*, þegar þær koma upp í 2að, 4ða, 6ta .... veldi, eins og í (250) er sýnt. Af þessu eðli þeirra eru þær mjög hentugar til að ummynda *formulur* með, og setja óendanlegar *series* í endanlega mynd. Þær eru nokkurs konar snildarbragð reikningsmeistaranna.

252. Skýring. Það tilveruleysi stærða, er ímynduðu stærð-

irnar tákna í boglínufræðinni, er öðruvísi en tilveruleysi það, sem núllið táknar. Núllið er útgangspunktur eða upphaf stærðarinnar og þaðan vex hún annaðhvort í *positift* eða *negatift* horf. En ímyndaða stærðin er gjörsamleg neitun allrar stærðarinnar, svo hún má hvorki vera *positif*, núll, nè *negatif*, og heldur ekki ∞, því ∞ er hin önnur samganga milli *positifs* og *negatifs*. Í boglínufræðinni (sem stundum kallast *geometria analytica*, og stundum *geometria sublimior* og *analysis infinitorum*) taka menn sèr beina línu, lagða helzt í gegnum boglínuna miðja, sem þá kallast ás (*axis*) einnig *abscissu*-lína. Í þessari línu taka menn sèr fastan punkt, og mæla út frá honum, t. a. m. bæði til hægri og vinstri sjálfviljugan spotta eða spöl, er heitir *abscissa*, og tákna hann optast með x. Upp eða niður frá *abcissu*-endanum mæla menn helzt þverbeint aðra línu ósjálfráða upp eða niður, þangað sem boglínupunkturinn er, kallast sú lína *ordinata* og táknast með y, ef punkturinn er fyrir ofan, en $-y$, ef hann er fyrir neðan *abscissu*-ásinn, eða rèttara sagt, y getur orðið stundum *positift* og stundum *negatift*. Nú hafa menn *formulu*, sem kallast líking boglínunnar, þeirrar sem um er að ræða, svo sem:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

er líking hringsins, og þar í a hálfi þvermælir, er þar x reiknað frá miðju. Ímyndum oss nú, að x sè *positift* mælt til hægri, en *negatift* til vinstri. Setjum nú, að a væri $= 10$, og einhverjum skyldi þóknast að vita, hvað stór þessa hrings hálfa breidd væri, þar sem er $x = 5$; þá reiknum vèr út y eptir *formulunni* og látum vera $x = 5$, þannig:

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{10^2 - 5^2} \\ &= \pm \sqrt{100 - 25} \\ &= \pm \sqrt{75} \\ y &= \pm\, 8{,}66. \end{aligned}$$

Hringspunkturinn fyrir ofan ásinn er þá $+\, 8,\ 66$ og annar fyrir neðan ásinn $= -\, 8,\ 66$ að reikna frá ásnum. Eins eru aðrir tveir vinstra megin við miðjuna, þar sem $x = -\, 5$, því $(-\, 5)^2 = +\, 25$, sem dregið frá 100 gefur 75, og $y = \pm\, 8,$ 66 rètt eins og hægra megin var. Látum oss nú finna *ordinötuna*, þar sem er $x = 10$, þá er:

$$y = \pm \sqrt{10^2 - 10^2}$$
$$= \pm \sqrt{0}$$
$$y = \pm 0.$$

Þetta $y = \pm 0$ táknar, að báðir hringpunktarnir liggi í ásnum, og eins er vinstra megin. Núllið vísar þannig á vissan punkt. Nú viljum vèr finna hálfbreidd hringsins, þar sem $x = + 15$; þá reikna eg eins út y fyrir $+ 15$, þá er:

$$y = \pm \sqrt{10^2 - 15^2}$$
$$= \pm \sqrt{100 - 225}$$
$$= \pm \sqrt{-125}.$$

Hèr er þá komin ímynduð stærð $y = \pm \sqrt{-125}$, $= \pm \sqrt{125 . -1} = \pm \sqrt{125} . \sqrt{-1} = \pm 11{,}18\sqrt{-1}$, sem segir, að hringurinn hafi þar alls enga *ordinötu* eða hálfbreidd. Hèr sjáum vèr þá glögglega mismuninn á núllsins stærðarneitun og ímynduðu stærðarinnar stærðarneitun. Núllið vísar á vissan punkt og segir, að boglínupunkturinn liggi í ásnum, en ímyndaða stærðin segir hann sè hvergi. Hèr er nefnilega komið út fyrir hringinn.

Með öldungis sama hætti er sporbaugsins (*ellipsis*) líking,

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

En b er þar hinn hálfi minni ás, eða hálfbreidd í gegnum miðjuna, en a er hinn hálfi lengri ás. Þessu líkt er með fleygbogann (*parabola*). Sjá *Ursins* stjörnufræði útlagða af Jónasi Hallgrímssyni, bls. 94, og *Fischers* eðlisfræði útlagða af síra Magnúsi Grímssyni, bls. 45, 46. *Parabolu*-líking er:

$$y = \pm \sqrt{px},$$

þegar *abscissurnar* x eru mældar frá hvirflinum og p er *parameter* eða fleygbogans breidd í gegnum brennipunktinn. Hvenær sem x er tekið *negatift*, þá verður y *imaginært* og neitar allri breidd og núllinu líka. *Parabola* hefir tvo óendanlega kjálka.

Enn nú merkilegri er *hyperbola*

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

ellegar sú, sem er einfaldari, hin jafnhliða *hyperbola*

$$y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$$

þar sem $b = a$. Hún er fyrir það merkilegri, að *imaginæru* stærðirnar slíta hana í sundur í tvent, því frá $x = 0$ til $x = a$ verða allar *ordinöturnar imaginariæ*, og það alt eins vinstra megin sem hægra megin, því $x = -a$ kvaðrerað gefur $+ a^2$, svo að

$$y = \pm \sqrt{a^2 - a^2}$$
$$= \pm 0,$$

og boglínan verður þar í ásnum, eins og hægra megin. Þar á móti, ef tekið er $x > a$, hvort sem er hægra megin eða vinstra megin, þá verða *ordinöturnar realar*, svo boglínan fær 4 óendanlega kjálka, 2 til hægri og 2 til vinstri, með sundi á milli frá $x = -a$ til $x = +a$, þar sem *ordinöturnar* eru ímyndaðar. En í sjálfum þessum takmörkum $x = -a$ og $x = +a$ eru *ordinöturnar* $= 0$, og liggja þar tveir hvirflar *hyperbolunnar*, er horfa hvor mót öðrum, en beina línan milli þeirra heitir *hyperbolunnar* stærrí ás, og eru á honum engar *ordinötur*, eins og áður er sagt. Enn nú merkilegri eru þó boglínur þær, sem eiga sèr fráskilin egg, eða eggmyndaða bauga (eggbaugur, *Oval* á dönsku, þýzku og frakknesku) og fráskilda depla, þegar eggbaugurinn verður að punkti. Eggbaug hefir t. a. m.:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}}$$

og fráskilinn depil

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x-b}{a}}.$$

Eggbaugurinn liggur milli $x = -c$ og $x = 0$ í fyrri líkingunni; fráskildi depillinn liggur í $x = 0$, í síðari líkingunni. Hèr vísar $x = b$ á hvirfil boglínunnar í báðum, en c er lengd eggbaugsins, sem er $= 0$ í seinni líkingunni. Sjá *Ramus, Analytisk Geometri*, bls. 107. Ellegar *Bourguet, Traités élémentaires de calcul differentiel et de calcul integral*. 1 deild, bls. 223. Í þessum bókum eru myndirnar uppdregnar.

253. Þó að ímynduðu stærðirnar sè algjörðar neitanir stærða eins og vèr höfum sèð í (252) sannað af boglínufræðinni, þá mega menn þó ekki halda, að dygð þeirra sè einungis þar í innifalin. Þær líkjast í stærðafræðinni loptsiglingunni í eðlisfræðinni, því hugurinn getur á hinu *imaginæra* loptskipi eins og hafið sig

upp frá fastri jörðu, siglt fram og aptur í tilveruleysisins ginnungagapi og horfið svo til jarðarinnar aptur, þegar hann vill, og á þann jarðfasta klett, sem honum þóknast. Uppá þetta skulum vèr nú nú strax sjá dæmi. Af því sem vèr höfum sèð að undanförnu, hafa flestar tölur verulegar rætur, sumar *rationalar* sumar *irrationalar*. Hinar *positifu* hafa 2 rætur af jöfnum stigum, aðra *positifa*, aðra *negatifa*; hinar *negatifu* hafa eina rót með sama merki sem veldið (248, λ, μ, ν). En nú fáum vèr að sjá, að rætur hverrar tölu eru alls miklu fleiri, því þær eru ætíð eins margar sem einingarnar í rótarvísinum, og það eru *imaginæru* ræturnar, sem við bætast.

Vèr viljum fyrst gefa nokkur sýnishorn rótanna af 1, þá er fyrsta rótin af 1 einungis ein, nefnilega

$$\sqrt[1]{1} = 1.$$

Önnur rótin af 1 eru tvær, nefnilega:

$$\sqrt{1} = \pm 1,$$

því $+1 \times +1 = +1$ og $-1 \times -1 = +1$.

Þriðju ræturnar af 1 eru þrjár, nefnilega ein *reöl*, því $(+1)^3 = 1$; (ekki $(-1)^3$, því það er $= -1$), og tvær ímyndaðar, nefnilega:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Að $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$, sèst þannig: Tökum fyrst teljarann og *cuberum* hann, svo:

$$\begin{array}{llr}
-1 + \sqrt{-3} & \text{rótin.} & (\alpha) \\
\underline{-1 + \sqrt{-3}} & \text{rótin.} & (\beta) \\
1 - \sqrt{-3} & & \\
\underline{\quad - \sqrt{-3} - 3} & \cdots\cdots\cdots & (\gamma) \\
1 - 2\sqrt{-3} - 3 & \text{kvaðrat hennar.} & \\
\underline{-1 + \sqrt{-3}} & \text{rótin.} & \\
-1 + 2\sqrt{-3} + 3 & & (\delta) \\
\underline{\quad + \sqrt{-3} + 2\,.\,3 - 3\sqrt{-3}} & & (\varepsilon) \\
-1 + 3\sqrt{-3} + (1+2)\cdot 3 - 3\sqrt{-3}, & \textit{cubus}\ \text{rótarinnar} & (\zeta)
\end{array}$$

sama sem

$$-1 + 3\sqrt{-3} + 9 - 3\sqrt{-3} \qquad (\eta).$$

Hèr gengur upp $+ 3\sqrt{-3}$ móti $- 3\sqrt{-3}$, þá er eptir

$$-1 + 9 = 8;$$

þessir 8 eru *cubus* teljarans. Eins er 8 *cubus* nefnarans, því $2^3 = 8$, þess vegna *cubus* brotsins $= \frac{8}{8} = 1$. Þar með er þá sýnt, að ofanskrifað brot er þriðja rót af 1.

Merk: Þegar $\sqrt{-3}$ á að margfaldast með sjálfu sèr í (α) og (β), þá kemur -3 í (γ); samber (249). Þessir -3 verða að $+ 3$ í (δ), vegna þess þar er margfaldað með -1. Í (ε) kemur $+ 2 \,.\, 3$ af margföldunni $-2\sqrt{-3}$ með $+\sqrt{-3}$, því fyrst margfaldast *coefficientarnir* $-2 \times +1 = -2$; síðan ræturnar $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3}$, þar af kemur *productið* $= -3$ eptir (249); þess vegna: $-2 \times -3 = + 2 \,.\, 3$ ($= 6$), ellegar, þegar á eptir skal samanleggja, er betra að skrifa $2 \,.\, 3$. Í (ζ) sèst samlagningin $1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 = 3 \,.\, 3 = 9$.

Með sama hætti á og að hefja hina ímynduðu rótina

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

upp í þriðja veldi. En nú viljum vèr breyta til, og taka ekki teljarann sèr og nefnarann sèr, eins og í fyrra sinni, heldur báða í einu lagi, þannig:

$$\begin{array}{l}
-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} \\
-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} \\
\hline
\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-3} \\
\qquad + \frac{1}{4}\sqrt{-3} - \frac{1}{4} \,.\, 3 \\
\hline
\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} - \frac{3}{4} \\
-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} \\
\hline
-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{-3} + \frac{3}{8} \\
\qquad - \frac{1}{8}\sqrt{-3} + \frac{1}{4} . 3 + \frac{3}{8}\sqrt{-3} \\
\hline
-\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{-3} + \frac{9}{8} + \frac{3}{8}\sqrt{-3} = \frac{8}{8} = 1.
\end{array}$$

Þannig höfum vèr þá sèð, að báðar ímynduðu ræturnar *potenseraðar* gefa veldið $= 1$.

Fjórðu ræturnar af 1 eru fjórar, tvær verulegar $+ 1$ og $- 1$, og tvær ímyndaðar: $\pm \sqrt{-1}$, svo að

$$(+1)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1} = +1$$
$$(+1)^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{1} = -1$$
$$(+1)^{\frac{1}{4}} = +\sqrt{-1}$$
$$(+1)^{\frac{1}{4}} = -\sqrt{-1}.$$

Menn hafa tekið sèr þá reglu eða komið sèr saman um, að láta hinn brotna veldis*exponent* tákna allar ræturnar, en rótarmerkið skuli tákna einungis *reala positifa* rót. Reynum nú ímynduðu 4ðu ræturnar:

$$\begin{array}{ll} +\sqrt{-1} & \\ \underline{+\sqrt{-1}} & \\ + \;\; -1 & \text{kvaðrat.} \\ \underline{\sqrt{-1}} & \\ -\sqrt{-1} & \text{þriðja veldi.} \\ \underline{\sqrt{-1}} & \\ - \;\; -1 = +1 & \text{fjórða veldi.} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} -\sqrt{-1} & \\ \underline{-\sqrt{-1}} & \\ + \;\; -1 & \text{kvaðrat.} \\ \underline{-\sqrt{-1}} & \\ \sqrt{-1} & \text{þriðja veldi.} \\ \underline{-\sqrt{-1}} & \\ - \;\; -1 = +1 & \text{fjórða veldi.} \end{array}$$

Hèr þykist eg hafa fundið samlíkingu minni stað, nefnilega að sigla í tilveruleysis ginnungagapi með því að *potensera* ímyndaða stærð, og koma niður á jarðfastan klett, eininguna.

254. Vèr viljum einnig gefa nokkur sýnishorn rótanna af -1.

Þá er

$$\sqrt[1]{-1} = -1$$
$$\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

og $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ hinar tvær ræturnar.

Hvað *reölu* þriðju rótina snertir, þá er

$$-1 \,.\, -1 \,.\, -1 = -1.$$

Nú er að prófa hinar *imaginæru:*

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} \\ \underline{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}} \\ \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-3} \\ \underline{\quad \pm \frac{1}{4}\sqrt{-3} - \frac{1}{4}.3} \\ \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} - \frac{3}{4} \quad \text{kvaðratið.} \end{array}$$

Þetta má nú samandraga þannig:

$$\begin{array}{l} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} - \tfrac{1}{2} \\ \underline{\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}} \quad \text{rótin eða ræturnar.} \\ \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{-3} - \tfrac{1}{4} \\ \underline{\qquad + \tfrac{1}{4} \,.\, - 3 \mp \tfrac{1}{4}\sqrt{-3}} \end{array}$$

þriðja veldi $= -\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} = -\tfrac{4}{4} = -1$.

Fjórðu ræturnar af -1 eru fjórar, en engin *reöl,* heldur allar ímyndaðar. Tvær af þeim eru

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}}.$$

Þetta má eptir (237) skrifa þannig:

$$\begin{array}{l} \sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1} \\ \underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}} \\ \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} \\ \underline{\quad \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}} \\ \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-1} - \tfrac{1}{2} \\ = \pm \sqrt{-1}, \quad \text{sem er kvaðrat beggja.} \end{array}$$

Nú þarf ekki annað til að finna fjórða veldið, en að kvaðrera kvaðratið; kemur þá -1.

Hinar aðrar tvær ímynduðu ræturnar eru

$$\begin{array}{l} -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1} \\ \underline{-\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}} \\ \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} \\ \underline{\quad \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}} \\ \tfrac{1}{2} \mp \sqrt{-1} - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{-1}, \quad \text{kvaðratið,} \end{array}$$

og þegar það er kvaðrerað, kemur einnig -1.

Höfuðreglan um þessar mörgu rætur verður hèr ekki framsett. En þeir sem numið hafa *trigonometriu,* geta lesið *Ramusar Algebra* og *Functionslære,* bls. 145.

255. Í undangangandi töluliðum (253) (254) er einungis talað um ræturnar af $+1$ og -1. En þegar menn vita þær, er hægt að finna *imaginæru* ræturnar af öllum tölum, hvort sem þær eru *positifar* eða *negatifar.* Þó útheimtist einnig, að menn kunni að útdraga eina *reala* rót af tölunni (hvað ekki hefir enn nú hèr kent verið nema með tilraunum). Setjum nú, að talan, sem *imaginæru* ræturnar eiga að dragast út af, sè a, og aðalrót hennar (*radix principalis*) sè $\sqrt[n]{a}$, þá er

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a.1} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{1}.$$

þá er auðsèð, að allar n^{tu} ræturnar af a fást með því að margfalda aðalrótina af a með öllum n^{tu} rótunum af 1. Sömuleiðis er.

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a.-1} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{-1},$$

sem segir, að n^{tu} ræturnar af $-a$ fáist með því að margfalda aðalrótina af a með öllum n^{tu} rótunum af -1. þannig er þá yfir höfuð.

$$(\pm a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ (\pm 1)^{\frac{1}{n}}.$$

256. **Dæmi:**

Að finna 4ðu ræturnar af 625 og -625; þær eru:

$$(+625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}\ (+1)^{\frac{1}{4}} = 5 . + 1 = 5$$

$$(+625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}\,(+1)^{\frac{1}{4}} = 5 . - 1 = -5$$

$$(+625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}\,(+1)^{\frac{1}{4}} = 5 . + \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1} = \sqrt{-25}$$

$$(+625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}\,(+1)^{\frac{1}{4}} = 5 . - \sqrt{-1} = -5\sqrt{-1} = -\sqrt{-25}.$$

Að 5 er 4ða rót af 625, sèst af $5 . 5 . 5 . 5 = 625$.

Að -5 er 4ða rót af 625, sèst af $-5 . -5 = +25$ og $25^2 = 625$, sem er *quadratum quadrati* eða bíkvaðrat af -5.

Að $5\sqrt{-1}$ er 4ða rót af 625, sèst af $(5\sqrt{-1})^2 = 25 . -1 = -25$, og $(-25)^2 = +625$.

Að $-5\sqrt{-1}$ sè 4ða rót af 625, sèst af $(-5\sqrt{-1})^2 = 25 . -1 = -25$ og $(-25)^2 = +625$.

Sama er að segja um $\sqrt{-25}$ og $-\sqrt{-25}$, því kvaðratið af hvorutveggju er -25, og kvaðratið þar af er $+625$.

Enn framar:

$$(-625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}(-1)^{\frac{1}{4}} = 5(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}) = 5\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$(-625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}(-1)^{\frac{1}{4}} = 5(\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}) = 5\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$(-625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}(-1)^{\frac{1}{4}} = 5(-\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}) = -5\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$(-625)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}(-1)^{\frac{1}{4}} = 5(-\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}) = -5\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Til að reyna, hvort þessar hèr settu rætur eru rèttar 4ðu rætur

af — 625, verður að kvaðrera hverja þeirra tvisvar. Tökum fyrst $5\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$, og kvaðrerum hana eptir (54, *A*), og setjum $a = 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, og $b = 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$, þá verður

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= 25 \,.\, \tfrac{1}{2} + 2 \,.\, 5\sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1} + 25 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, -1 \\ &= 25 \,.\, \tfrac{1}{2} + 50 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \sqrt{-1} - 25 \,.\, \tfrac{1}{2} \\ &= \quad + 25\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Þegar þetta $25\sqrt{-1}$ er aptur kvaðrerað, kemur — 625. Sömuleiðis má kvaðrera $5\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$ eptir (54, *C*), þannig:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= 25 \,.\, \tfrac{1}{2} - 2 \,.\, 5\sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1} - 25 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, 1 \\ &= \quad - 50 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \sqrt{-1} \\ &= \quad - 25\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Þegar þetta $-25\sqrt{-1}$ er aptur kvaðrerað, kemur — 625.

Vèr getum nú, ef viljum, kvaðrerað næstu rót með margföldun, þannig:

$$\begin{array}{rrrr} -5\sqrt{\tfrac{1}{2}} & +\ 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1} & & \\ -5\sqrt{\tfrac{1}{2}} & +\ 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1} & & \\ \hline 25 \,.\, \tfrac{1}{2} & -\ 25 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} & & \\ & -\ 25 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} & -\ 25 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, 1 & \\ \hline 25 \,.\, \tfrac{1}{2} & -2 \,.\, 25 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} & -\ 25 \,.\, \tfrac{1}{2} & \\ & = -\ 25\sqrt{-1}, & & \end{array}$$

þetta aptur kvaðrerað gefur — 625.

Sè nú farið eins með seinustu rótina $-5\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$, þá verður kvaðratið $= +25\sqrt{-1}$, og bíkvaðratið $= -625$.

257. Það er kallað líking (*æquatio*), þegar sama stærð er sett eða ákvörðuð báðum megin við jafnaðarmerkið. (En um líkingar áformum vèr að tala síðar í líkingarfræðinni). En af því, sem vèr höfum sagt um hinar ýmislegu rætur sömu stærða, þá leiðir það, að stundum kunna að vera mismörg verð (*valor; valores*, þegar fleiri eru) hægra megin og vinstra við jafnaðarmerkið, t. d.

$$a = \sqrt[m]{b}.$$

Vinstra megin hefir þessi líking 1 verð eða gildi *a*, en hægra megin hefir hún tvö verð, ef *m* er jöfn tala, en eitt, ef *m* er oddatala. En sè ímynduðu ræturnar taldar með, þá skrifa menn líkinguna heldur þannig:

$$a = b^{\frac{1}{m}}.$$

Eru þá *m* ræturnar eða verðin hægra megin. Þess háttar líkingar með mismörgum verðum vinstra og hægra megin kallast ófullar líkingar (*æquationes incompletæ*), svo sem

$$a = \sqrt[4]{b},$$

því vinstra megin er eitt gildi, en hægra megin eru tvö gildi, *positift* og *negatift;* og þar að auki eru hægra megin tvö ímynduð gildi. Þessa ófullu líkingu má lesa þannig eða skilja: a er eitt af hinum 4 verðum, sem liggja í $\sqrt[4]{b}$. Þar á móti heita þær fullar líkingar (*æquationes completæ*), sem hafa jafnmörg verð báðum megin við jafnaðarmerkið, svo sem:

$$(\sqrt[4]{b})^4 = b,$$

sem má þannig lesa: Sèrhver 4ta rót af b, hafin upp í 4ða veldi, gefur b. Hèr er ekki nema eitt gildi báðum megin, því þó byrjað sè á ýmislegum rótum stærðarinnar b, þá koma allar leiðirnar saman í stærðinni b.

258. Að útdraga kvaðratrót af gefinni tölu.

Eptir margföldunartöflunni (45, 2) geta menn fljótt sèð, milli hverra heilla talna kvaðratræturnar af tölunum alt til hundraðs liggja, ellegar eptir þessari töflu:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	kvaðratrót,
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	kvaðrat.

Hèr eru ræturnar í efri línunni, en kvaðrötin í hinni neðri. Af henni má einnig sjá, að hin fyrsta kvaðratrót, sem ritast með tveimur stöfum, er 10, og að hennar kvaðrat er hin fyrsta þrístafaða tala = 100. Hèr af leiðir þá, að sèrhvert tvístafað kvaðrat hefir einstafaða rót. Hafi menn stærra kvaðrat, svo sem þrjá eða fjóra stafi, má skera aptan af tölunni með stryki tvo stafi; kemur þá einingastafur í rótina úr afskornum stöfum kvaðratsins hægra megin, en tugastafur rótarinnar úr stöfunum þar fyrir framan. Hafi kvaðratið fleiri stafi en 4, má skera aðra tvo stafi aptan af því, og yfir höfuð má skera kvaðratið í stuðla frá hægri hendi til vinstri, með tveimur stöfum í hverjum, verður þá í seinasta stuðli vinstra megin annaðhvort tveir eða 1 stafur, þannig:

.|..|..|..|..

kemur þá í rótina stafur úr hverjum stuðli, því eins og

$10^2 = 1|00$ 2 stuðlar og 2 rótarstafir,

svo er $100^2 = 1|00|00$ 3 stuðlar og 3 rótarstafir,
$1000^2 = 1|00|00|00$ 4 stuðlar og 4 rótarstafir.

Þar má því ætíð fá fyrsta staf rótarinnar út af stuðlinum, sem er næstur vinstri hendi eptir áðurskrifaðri töflu, því annaðhvort stendur stuðullinn nákvæmlega í töflunni, og er þá rót hans hinn fyrsti stafur hinnar eptirleituðu rótar, ellegar, ef fyrsti stuðull stendur ekki í töflunni, þá á að taka hið næstminna kvaðrat, sem stendur í töflunni, og er þá rót þess hinn fyrsti stafur hinnar eptirleituðu rótar. Kvaðratið af þessum staf skal dragast frá fyrsta stuðli, og hinn næsti stuðull færast niður til afgangsins. Dæmi upp á regluna um hinn fyrsta rótarstaf skal vera talan 4096; skerum vèr hana sundur í stuðla og sjáum, að rótin verður tvístöfuð, þannig:

$$\begin{array}{l} \sqrt{40|96} = 6. \\ \underline{36|00} \\ \;\;4\,96. \end{array}$$

Fyrsti stuðull er hèr 40, hið næstminna kvaðrat í töflunni er 36, og kvaðratrót þess er 6, því 6 sinnum 6 er 36 (en það eru raunar hèr 36 hundruð, og má skrifa núllin, ef vill, en það má líka sleppa þeim, en undirskilja þó). Nú er bersýnilegt, hvers vegna annar stuðull 96 á að færast niður til afgangsins, sem er 4. Nú vantar oss síðara staf rótarinnar, og set eg því punkt aptan við hinn fundna rótarstaf 4, af því eg vil engan staf setja þar, meðan eg veit ekki, hver hann er, einingastafurinn rótarinnar. En hann liggur þó í afganginum 496, og á að finnast út úr honum.

259. Framhald. Hvernig hinn annar rótarstafur verði fundinn. Aðferðina til þess kennir oss kvaðrat *binomii*

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \cdots\cdot (54,\ A).$$

Vèr vitum eða ímyndum oss, að rótin sè tvístöfuð eða hafi í sèr tugi og einingar. a eru tugir rótarinnar, en b einingarnar. Vèr höfum í undanganganda dæmi fundið tugastafinn eða tugina, og vitum, að $a = 60$; er þá eptir að finna einingastafinn. Þar nú í kvaðrati *binomii* $a^2+2ab+b^2$ fyrsti liðurinn a^2 er ekki í bókstöfunum blandaður með b, þá er hann í þessu dæmi alkunnugur orðinn, þá má skera þann lið frá $a^2+2ab+b^2$, þannig:

$$\sqrt{a^2|+2ab+b^2} = a+$$
$$\frac{a^2}{\quad +2ab+b^2.}$$

Hèr er þá eins langt komið í bókstafadæmi þessu, nefnilega: tugirnir a eru kvadreraðir og dregnir frá hinu gefna kvaðrati; er þá eptir $2ab + b^2 = 496$. Nú er hægt að finna $2a$, þar vèr vitum a, eða hinn fundna tugastaf rótarinnar, það á því að tvöfalda hinn fundna rótarstaf, þá fæst tala, er skal deila $2ab$ með, til að fá b, því $\frac{2ab}{2a} = b$. Þannig fæst b í bókstafareikningnum. Eins má fara að í tölunum, þó með þeirri varúð að taka stundum ekki hinn fulla kvóta, þó heil tala sè, því kvaðratið af einingastafnum b, nefnilega b^2, kann að hafa tugi, sem þá hlaupa saman við $2ab$, sem eru tugir. Í talnadæmi voru tvöföldum vèr þá 6; kemur 12, sem er *divisorinn;* með honum deilast 49 tugir, en vèr skiljum eptir einingastafinn 6; koma nú 4 í kvóta, sem er einingastafur rótarinnar. Þessi nýi rótarstafur verður að prófast, með því að margfalda deilinn með honum, skrifa *productið* undir deilinn. En framar skal kvaðrera hinn nýfundna einingastaf rótarinnar og skrifa einingastaf kvaðratsins undir einingastaf afgangsins, sem í talnadæminu hèr er 6, leggja svo saman $2ab$ og $b^2 = 2 \,.\, 60 \,.\, 4 + 4^2 = 480 + 4^2 = 496$. Verði þetta nýja $2ab + b^2$ í tölunum jafnt hinu fyrra, sem framkom við frádragninguna, er rótin nákvæmlega útdregin. Verði hið nýja $2ab + b^2$ of stórt til að dragast frá hinu fyrra, þá verður að minka kvótann b, þangað til frádregið verður, en ekki lengur. Form reikningsins verður þá svona:

$$\begin{array}{rll} & & \text{Rótin.} \\ & \sqrt{a^2|+2ab+b^2} & = a + b \\ & \underline{a^2 \qquad\qquad\quad} & \\ & +2ab+b^2 & \\ \text{deilir} \cdots\cdot & (2a) & \\ \text{legg saman} & \left\{ \begin{array}{l} 2ab \\ \quad +b^2 \end{array} \right. & \\ & \overline{2ab+b^2} & \\ & \overline{\quad 0. \quad} & \end{array}$$

Eptir þessu formi á nú að þræða í tölunum:

$$\begin{array}{rll}
\sqrt{40|96} & = 64 & \\
36 & & \\
\hline
496 & & \\
2a = & (12). & \text{Deilir} = 2 \,.\, 60 = 120. \\
\left\{\begin{array}{l} 2ab = \\ b^2 = \end{array}\right. & \begin{array}{l} 48. \\ 16 \end{array} & \begin{array}{l} = 2 \,.\, 60 \,.\, 4 = 480. \\ = 4^2 \end{array} \\
\hline
& 496 & \\
\hline
& 0. &
\end{array}$$

Þar $2ab+b^2 = (2a+b)b$, þá má stytta þenna reikning með því að skrifa kvótann b aptan við deilinn $2a$, og margfalda síðan þetta $2a+b$ með b, þannig:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{a^2|+2ab+b^2} = a + b & \\
a^2 & \\
\hline
-2ab+b^2 & \\
2a+b, & \text{deilir} + \text{kvóti}. \\
2ab+b^2 & \\
\hline
0. &
\end{array}$$

Og alt eins í tölunum

$$\begin{array}{rl}
& \sqrt{40|96} = 64 \\
& 36 \\
\hline
& 496 \\
2a+b = & 124 \\
(2a+b)b = & 496 \\
\hline
& 0.
\end{array}$$

Þetta getum vèr einnig borið saman við kvaðreringu, þannig:

$$\begin{array}{r}
60 + 4 \\
60 + 4 \\
\hline
3600 + 240 \\
240 + 16 \\
\hline
3600 + 480 + 16.
\end{array}$$

Dæmi upp á það, þegar ekki má taka hinn heila kvóta fullan, er þetta:

$$\begin{array}{l} \sqrt{3|24} = 18 \\ \underline{\;1\;\;\;} \\ \;224 \\ \;\;28 \\ \underline{\;224} \\ \;\;\;0. \end{array}$$

Hèr er 2 í 22 11 sinnum; en það er ætíð víst, að kvótinn má aldrei vera > 9. En hèr er ekki nóg með það, því ef eg tek 9 fyrir b, þá verður $2a + b = 29$, og það margfaldað með 9, gefur 261, sem er > 224. En það tekst að láta b vera 8. Menn verða þannig í þessu stundum að reyna nokkuð undan sèr.

260. Þegar stafirnir í kvaðratinu eru fleiri en svo, að þeir fylli tvo stuðla, þá gildir sama bókstafaforskript, því þá má skoða töluna fyrst svo, eins og seinasti stuðullinn næst hægri hendi væri enginn, t. d.

$$2|07|36 = 207 \text{ hundruð} + 36,$$

því þegar búið er að finna $\sqrt{207}$, þá verður sú rót nýtt a, þegar stuðullinn 36 síðan kemur til skoðunar, þannig:

$$\begin{array}{rcll}
 & & \overbrace{a\;b}^{} \\
 & & ab & \\
 & \sqrt{2|07|36} & = 144 & \text{rótin.} \\
 & \underline{1\,..\;\;\;\;} & & \\
 & 107\;.. & = 107 & \text{hundruð.} \\
2a+b & = \;24\;.. & = (2\,.\,10 + 4) & \text{hundruð.} \\
(2a+b)b & = \underline{\;96\;..} & = 96 & \text{hundruð.} \\
 & 1136\,. & & \\
2a+b & = \;284 & = (2\,.\,140 + 4) & \text{einingar.} \\
(2a+b)b & = \underline{1136} & & \text{einingar.} \\
 & 0. & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\text{Hèr er} \\ a = 10 \\ b = 4.\end{array}\right\} \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}\text{Hèr er} \\ a = 140 \\ b = 4.\end{array}\right\}
\end{array}$$

Þetta berum vèr nú saman við kvaðreringuna

$$\begin{array}{r}
140 + 4 \\
\underline{140 + 4} \\
19600 + 560\;\;\;\;\;\;\;\; \\
\underline{560 + 16} \\
19600 + 1120 + 16 = 10000 + 9600 + 1136.
\end{array}$$

Addendi hægra megin við jafnaðarmerkið eru hèr hinir sömu, sem *subtrahendi* í rótarútdrættinum, og summan af *addendis* er 20736.

Sama er aðferðin, hvað margir stuðlar sem í kvaðratinu verða. Þegar nýr stuðull færist niður til leifanna, þá verða allir hinir

fengnu rótarstafir nýtt a, en hinn næsti eptirleitaði rótarstafur hið nýja b,

Nú viljum vèr finna kvaðratrótina af 54007801.

$$
\begin{array}{lcrl}
 & & \sqrt{54'00'78'01} & = 7349 \\
 & & 49|..|..|.. & \\
\hline
 & & 5\,00\,....\, & \qquad a \quad b \\
2a+b & = & 1\,43\,....\, & = 2.70+3 \\
(2a+b)b & = & 4\,29\,....\, & \\
\hline
 & & 7178\,.. & \qquad a \quad b \\
2a+b & = & 1464\,.. & \;\; 2.730+4 \\
(2a+b)b & = & 5856\,.. & \\
\hline
 & & 132201 & \qquad a \quad b \\
 & & 14689 & \;\; 2.7340+9 \\
 & & 132201 & \\
\hline
 & & 0. &
\end{array}
$$

261. Þegar draga skal kvaðratrót út af tugabroti eða blandinni tölu, sem tugabrot er við, þá skal skera hana í stuðla, þannig að 2 stafir sè í hverjum stuðli, en fyrsta skurðarstrykið skal setja þar sem komman er, halda svo stuðlaskurðinum áfram í heilu tölunni til vinstri handar, en í brotinu til hægri. Þá kann að verða 1 stafur í stuðlinum næst vinstri hendi, en verði 1 stafur í stuðli næst hægri hendi, þá skal fylla þann stuðul með núlli; byrja síðan rótarútdráttinn vinstra megin, eins og áður er sýnt.

Dæmi: Finnum kvaðratrótina af

456,789,

þá gjörist það svo:

$$
\begin{array}{lcrl}
 & & \sqrt{4|56,|78|90|} & = 21,372 \\
a^2 & = & 4 & \\
\hline
 & & 56 & \\
2a+b & = & 41 & \\
(2a+b)b & = & 41 & \\
\hline
 & & 1578 & \\
2a+b & & 423 & \\
(2a+b)b & = & 1269 & \\
\hline
 & & 30990 & \\
2a+b & = & 4267 & \\
(2a+b)b & = & 29869 & \\
\hline
 & & 1121,00 & \\
2a+b & = & 42742 & \\
(2a+b)b & = & 85484 & \\
\hline
 & & 26616. &
\end{array}
$$

Hèr varð afgangur af gefnu tölunni, og var hann 1121; við hann bætti eg einum stuðli = 00, til að geta fundið rótina nákvæmari; en svo varð afgangur aptur = 26616. Hvað lengi sem haldið væri áfram, kæmi hèr afgangur, því $\sqrt{4567890}$ er *irrational,* og þess vegna brotið $\sqrt{456{,}7890}$.

Prófa má reikninginn, þannig:

$$\begin{array}{r}
21{,}372 \\
\underline{21{,}372} \\
42744 \\
149604\,. \\
64116\,.\,. \\
21372\,.\,.\,. \\
\underline{42744\,.\,.\,.\,.} \\
456762384 \\
\underline{26616} \\
456{,}789000.
\end{array}
\quad \text{Afgangurinn legst við.}$$

Reikningurinn er rèttur og rótin rètt í þremur *decimölum,* sem fengnir eru. Því ef rótin væri 21373 = 21372 + 1, þá væri kvaðrat þessa *binomii*

$21372^2 + 2\,.\,21372\,.\,1 + 1^2 = 456762384 + 42744 + 1.$

Eða það, sem bættist við 456762384, yrði

42745,

sem er meira en afgangurinn, sem vèr höfðum, og hið nýja kvaðrat yrði

456805129,

sem er um 16129 of stórt, því

$$\begin{array}{r}
456805129 \\
\underline{456789000} \\
16129.
\end{array}$$

262. Hvenær sem afgangur verður, þegar rót er dregin út af heilli tölu, þá er rótin *irrational* eða ófullmæld (247). Vèr viljum hèr finna með rótarútdrætti ófullmældu stærðina $\sqrt{5}$, sem vèr nefndum (246).

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \sqrt{5} = 2{,}23606 \\
a^2 & = & \underline{4} \\
 & & 100 \\
2a+b & & 42 \\
(2a+b)b & = & \underline{84} \\
 & & 1600 \\
2a+b & = & 443 \\
(2a+b)b & = & \underline{1329} \\
 & & 27100 \\
2a+b & = & 4466 \\
(2a+b)b & = & \underline{26796} \\
 & & 30400 \\
(2a+b) & = & \underline{44720} \\
 & & 3040000 \\
2a+b & = & 447206 \\
(2a+b)b & = & \underline{2683236} \\
 & & 356764.
\end{array}
$$

Hèr var deilir $2a = 4472 > $ deilandi 3040; kom þá núll í rótina, varð þá $(2a+b)b = 0$, svo að *minuendus* 30400 kom óskertur niður.

Hina fundnu rót má og prófa með leifaprófi (150), því það er eins og að prófa

$$223606 \times 223606 + 356764,$$

sem á að *congruera* með

$$50000000000.$$

Þessi viðbættu 10 núll koma af þeim 5 stuðlum, sem viðbættir voru.

Ef vèr notum elleftarprófið, þá er

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}
\quad\;\; {}^{3\,3\,8\,9} \\
11)\underline{223606} \\
\quad\;\; 20327 \\
\\
\quad\;\; {}^{2\,4\,3\,3\,1} \\
11)\underline{356764} \\
\quad\;\; 32433 \\
\\
\quad\;\; {}^{6\,5\,6\,5\,6\,5\,6\,5\,6\,5} \\
11)\underline{50000000000} \\
\quad\;\; 4545454545.
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\text{þá} \quad 22306 \equiv 9 \pmod{11} \\
\qquad\quad 9 \,.\, 9 = 81 \\
\qquad\quad 356764 \equiv \underline{\;1\;} \pmod{11} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 82 \equiv 5 \pmod{11}. \\
\qquad\qquad \text{Sömuleiðis er:} \\
\qquad\quad 50000000000 \equiv 5 \pmod{11}.
\end{array}
\end{array}
$$

Hèr höfum vèr vinstra megin fundið *residua* með því að deila með 11, því sú deiling er auðveld.

263. Að útdraga *kúbík*rót af gefinni tölu.

Aðferðin er mjög lík kvaðratrótar útdrætti, en hèr ræður *cubus binomii* $a + b$, nefnilega

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Samber (54, *B*).

Hin fyrsta tvístafaða tala 10 hefir 4stafaðan *cubus* 1000, og þar til svara hinir 4 liðir í $a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3$, svo að b^3 verða einingarnar, $3ab^2$ tugirnir, $3a^2b$ hundruðin, a^3 þúsundin, þegar rótin er tvístöfuð. Tugastafur rótarinnar fæst óblandaður út af a^3; þess vegna má skera þann lið frá hinum með stryki; verður svo *kúbík*rótar útdrátturinn þannig:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{a^3| + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\
 & a^3 \\
\hline
 & + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
\text{deilir} = & (3a^2) \\
 & 3a^2b \\
 & \quad + 3ab^2 \\
 & \qquad + b^3 \\
\hline
 & 2a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

Eptir þessu á nú að þræða í tölunum, skera fyrst töluna í stuðla frá hægri hendi til vinstri með þremur stöfum í hverjum, draga svo *kúbík*rótina út af stuðli þeim, sem er næstur vinstri hendi, hún verður a; hún skrifast í rótina, *kúberast* síðan og dregst frá hinni gefnu tölu; færist svo niður til afgangsins hinn annar stuðull. Deilirinn $3a^2$ myndast af a, og með honum deilist $3a^2b$; kemur b; síðan er áframhaldið, eins og formið sýnir.

Vèr viljum draga *kúbík*rótina af 405224.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad ab \\
 & \sqrt[3]{405|224} = 74 \\
a^3 = & 343\ldots \\
\hline
 & 62224 \\
3a^2 = & (147) \\
3a^2b = & 588.. \\
3ab^2 = & 336. \\
b^3 = & 64 \\
\hline
 & 62224 \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

Með tilraunum verður nú að finna *kúbík*rótina af 405. Reyni eg 8, þá er $8 . 8 = 64$, og $8 . 64 = 512$, sem er > 405, þá $7 . 7 = 49$, og $7 . 49 = 343$, sem ekki er of stórt. Skrifa 7 í rótina, og a verður $= 70$. *Cubus* af $7 = 343$ dregst frá 405, verður 62 afgangur, færist þá niður næsti stuðull 224. Síðan myndast

deilir $3a^2$, með því að segja $7 \,.\, 7 = 49$ og $3 \,.\, 49 = 147$. Deilirinn verður 147 og lokast í sviga. Nú deilist $\frac{622}{147} = 4$ og b er þá 4. Með $b = 4$ margfaldast 147: kemur 588, sem eru hundruð, ɔ: 58800 (punktarnir tákna tvö núll). Þar næst reiknast $3ab^2 = 3 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 4 = 336$, sem eru tugir, nefnilega 3360. Loksins reiknast $b^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64$, sem eru einingar. Nú legst saman $58800 + 3360 + 64 = 62224$, sem dregst frá 62224; verður ekkert eptir.

264. Dæmi upp á 3 stuðla.

$$\sqrt[3]{52|734|375} = 375$$

a^3	=	27 . . . . . .
		25734
$3a^2$	=	(27). .
$3a^2b$	=	189 . .
$3ab^2$	=	441 .
b^3	=	343
		23653
		2081375
$3a^2$	=	(4107). .
$3a^2b$	=	20535 . .
$3ab^2$	=	2775 .
b^3	=	125
		2081375
		0.

Þegar hèr skal með deilinum 27 deila 257, má ekki taka heilu tölu kvótans fulla, sem er 9, því þá verða sèrframkvæmin

$3a^2b = 243$. .
og $3ab^2 = 729$.
og summan 3159. sem er $>$ 2573. Kvótinn má hèr ekki heldur vera 8, því þá verða sèrframkvæmin
$3a^2b = 216$. .
$3ab^2 = 576$.
2736. sem einnig er $>$ 2573.

Hèr verður því að reyna á undan sèr meira en í kvaðratrótar útdrætti. Við síðari deilinn 4107 þarf hèr ekki slíkar affellingar. Enda fara þær venjulega heldur minkandi í sama rótarútdrætti, vegna þess að sèrframkvæmin síðari verða lítil á móti hinum fyrri.

265. Dæmi upp á rótarútdrátt af tugabroti.

Þess er getið við kvaðratrót (261), að stuðlaafmörkunin byrji við kommuna og gangi til hægri. Nú viljum vèr draga út *kúbík*-rót af 0,00001728.

$$\sqrt[3]{0,|000|017|28} = 0,\ 0257$$

$$\begin{array}{lrr}
 & & 8 \\
\hline
 & & 9280 \\
3a^2 & = & (12).. \\
3a^2b & = & 60.. \\
3ab^2 & = & 150. \\
b^3 & = & 125 \\
\hline
 & & 7625 \\
\hline
 & & 1655000 \\
3a^2 & = & (1875).. \\
3a^2b & = & 13125.. \\
3ab^2 & = & 3675. \\
b^3 & = & 343 \\
\hline
 & & 1349593 \\
\hline
\text{Afgangur} & & 305407.
\end{array}$$

Til að prófa þessa rót 0,0257 má *cubera* hana og leggja þar við afganginn 305407. Þar má sleppa núllunum fyrst um sinn, og fara þannig að:

$$\begin{array}{rl}
257 & \\
257 & \\
\hline
1799 & \\
1285. & \\
514.. & \\
\hline
0,00066049 & \quad 8\ \textit{decimalar}. \\
257 & \\
\hline
462343 & \\
330245. & \\
132098.. & \\
\hline
0,000016974593 & \quad 12\ \textit{decimalar}. \\
0,000017280000 & \quad \text{hið gefna brot. Drag efra frá neðra.} \\
\hline
0,000000305407. & \quad \text{Afgangur eins og áður.}
\end{array}$$

Hvað merkjandi stafina snertir, má einnig prófa þetta með leifaprófi. Vèr viljum nú nota þar til 7.

$$7)\,2\overset{4}{5}\overset{5}{7} \qquad \text{þá } 257 \equiv 5\ (\textit{mod. } 7).$$
$$\underline{\ 36.}$$

Þetta *residuum cuberað* $5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125 \equiv 6$ (*mod.* 7).

$$305407 \equiv \underline{4}\ (\textit{mod. } 7).$$

$$7)\,1\overset{5}{2}\overset{6}{5} \qquad\qquad 10$$
$$\ 17 \qquad\qquad 10 \equiv 3\ (\textit{mod. } 7).$$

$$7)\overset{2\,4\,2\,6\,4}{305407}$$
$$\overline{43629}$$

$$7)\overset{3\,4\,6\,4\,5\,1\,3}{17280000}$$ þá einnig $17280000 \equiv 3$ (*mod.* 7).
$$\overline{2768571.}$$

Samber um leifaprófið (150) og athugann þar við.

266. Að útdraga *bíkvaðratrót* af gefinni tölu.

Þar *bíkvaðrat* hinnar stærstu einstöfuðu tölu 9, sem er 9 . 9 . 9 . 9 = 6561, er fjórstafað, en bíkvaðrat hinnar fyrstu tvístöfuðu tölu 10, sem er 10000, hefir 5 stafi, þá á nú að láta vera 4 stafi í hverjum stuðli. En *formulan* fyrir *bíkvaðrati binomii* $a + b$ fæst (meðal annars) með því, að margfalda *cubus binomii* með rótinni $a + b$, þannig:

$$\begin{array}{rl}
(a+b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
a + b = & a + b \\
\hline
& a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
& \quad\;\; a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{array}$$

Fyrsti rótarstafur fæst með tilraunum út af fyrsta stuðli eins og við kvaðrat- og *kúbík*rót, en deilirinn verður hèr $4a^3$, sem gefur kvótann b.

Dæmi: Vèr viljum útdraga fjórðu rót af 4477456.

$$\begin{array}{rcl}
 & & \sqrt[4]{447|7456} = 46 \\
a^4 & = & \underline{256\ldots.} \\
 & & 1917456 \\
4a^3 & = & (256)\ldots \text{ deilir.} \\
4a^3b & = & 1536\ldots \\
6a^2b^2 & = & 3456\ldots \\
4ab^3 & = & 3456\,. \\
b^4 & = & \underline{1296} \\
 & & \underline{1917456} \\
 & & 0.
\end{array}$$

Þar rótarvísirinn 4 er samsett tala = 2 . 2, þá má eptir (240,*), finna bíkvaðratrótina, með því að draga út kvaðratrót út af kvaðratrót tölunnar, því hèr er

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[2\cdot2]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}.$$

þá má reikna þetta dæmi þannig:

$$\begin{array}{r} \sqrt{4|47|74|56} = 2116 \\ \underline{4} \\ 47 \\ 41 \\ \underline{41} \\ 674 \\ 421 \\ \underline{421} \\ 25356 \\ 4226 \\ \underline{25356} \\ 0. \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{21|16} = 46 \\ \underline{16} \\ 516 \\ 86 \\ \underline{516} \\ 0. \end{array}$$

267. Að útdraga fimtu rót af gefinni tölu.

Aðferðin er svipuð hinum fyrri, en hèr verður að hafa 5 stafi í stuðli hverjum (ɔ: ætíð eins marga sem einingar eru í rótarvísinum). *Formulan* fyrir 5ta veldi *binomii* fæst (meðal annars) með því að margfalda 4ða veldi þess með $(a + b)$, og verður þessi:

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Dæmi: Vèr viljum draga 5tu rót, sem um var töluð í (234), út af tölunni

36893488147419103232.

$(a + b) = a^5 + (5a^4)b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$\sqrt[5]{36893|48814|74191|03232} = 8192$$

$$\begin{array}{rcl} a^5 & = & \underline{32768} \\ & & 412548814 \\ 5a^4 & = & (20480).... \text{ deilir.} \\ 5a^4b & = & 20480.... \\ 10a^3b^2 & = & 5120... \\ 10a^2b^3 & = & 640.. \\ 5ab^4 & = & 40. \\ b^5 & = & \underline{1} \\ & & \underline{209984401}. \end{array}$$

		20256441374191	
$5a^4$	=	(215233605)....	deilir.
$5a^4b$	=	1937102445....	
$10a^3b^2$	=	430467210...	
$10a^2b^3$	=	47829690..	
$5ab^4$	=	2657205.	
b^5	=	59049	
		19806301260099	
		4501401409203232	
$5a^4$	=	(2249601595605)....	deilir.
$5a^4b$	=	4499203191210	
$10a^3b^2$	=	21974130360...	
$10a^2b^3$	=	53660880..	
$5ab^4$	=	65520.	
b^5	=	32	
		4501401409203232	
		0.	

268. ***Binomialtheoremið*** (***theorema binomiale***) alment eignað hinum nafnfræga hugvitsmanni *Isaac Newton* og þess vegna kallað *theorema Newtonianum* (sumir eigna það hugvitsmanninum *Pascal*), er *formula*, er sýnir öll veldi *binomii* $a + b$, og hljóðar þannig:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}b^4 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdot \frac{n(n-1)\cdots\cdot(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdot m} a^{n-m}b^m .$$

þar í er, n *exponentinn* veldisins, sem *binomium* $a+b$ er hafið upp í. Stafurinn m er sætistala liðarins, sem verið er að ákvarða, þannig að $\frac{n}{1}$ $a^{n-1}b$ hefir fyrsta sæti, eða m er þar $= 1$. En stærðirnar $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.... kallast *binomialcoefficientar*. *Exponentinn* við a^n er hinn sami sem við $(a+b)^n$; síðan fara *exponentarnir* við a alt af minkandi lið eptir lið. þar á móti fara *exponentarnir* við b alt af vaxandi, unz seinasti liður verður b^n eða a^0b^n. Er þá orðið $m = n$, svo að $n - m$

$= 0$, og í öllum liðunum er summa *exponentanna* við a og b ætíð $= n$. Liðurinn

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1.2\cdots m}a^{n-m}b^{m}$$

er því ekki einungis seinasti liður, heldur hinn svo kallaði almenni liður (*terminus generalis*), eða liðanna almenna mynd (67). Í *coefficientunum* eru *factorarnir* ætíð jafnmargir í teljaranum, sem nefnaranum, t. d. vilji menn finna 7da veldi *binomii* $a+b$, þá er:

$$(a+b)^7 = a^7 + \frac{7}{1}a^6b + \frac{7.6}{1.2}a^5b^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}a^4b^3 + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^3b^4$$
$$+\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}a^2b^5 + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}ab^6 + \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7}b^7$$
$$= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Þannig þurfa menn ekki að útreikna hin undangangandi veldi af $a + b$, heldur má stökkva strax upp í hversu hátt veldi sem menn vilja.

269. *Coefficientana* í *binomialtheoreminu* táknar *professor Ramus* þannig:

$$1,\ A_1^{(n)},\ A_2^{(n)},\ A_3^{(n)},\ A_4^{(n)} \cdots\cdots A_m^{(n)} \cdots\cdots A_{n-1}^{(n)},\ 1.\ (\alpha).$$

Coefficientinn við fyrsta lið er ætíð 1, sömuleiðis við seinasta lið, ef veldis*exponentinn* er heil og *positif* tala. *Exponentinn* (n) í svigunum merkir hèr ekki, að *coefficientinn* A eigi að hefjast upp í nta veldi, heldur táknar hann *exponent* þess veldis, sem *binomium* $(a+b)$ það sinn er hafið upp í, og sem þessi *coefficient* á heima í. Neðan til við þessa *coefficienta* eru *indexar*, sem sýna, hverjum lið þeir heyra. $A_1^{(n)}$ stendur í 2um lið. $A_m^{(n)}$ táknar *coefficientinn* við hinn almenna lið. $A_{n-1}^{(n)}$ er *coefficientinn* við næstseinasta lið, og það af því, að í sèrhverju slíku veldi *binomii* $a+b$ eru n liðir eptir hinn fyrsta lið, og þess vegna hinn næsti hinum seinasta táknaður með *index* $n-1$. Eptir þessu verður þá:

$$A_1^{(n)} = \frac{n}{1},\quad A_2^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1.2},\quad A_3^{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3};$$

$$A_m^{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1.2.3\cdots m} \qquad (\beta).$$

Binomialtheoremið skrifast þá þannig með *Ramusar coefficientum*:

$$(a+b)^n = a^n + A_1^{(n)}a^{n-1}b + A_2^{(n)}a^{n-2}b^2 + A_3^{(n)}a^{n-3}b^3 \cdots$$
$$\cdots A_m^{(n)}a^{n-m}b^m \cdots + b^n \qquad (\gamma).$$

270. Sönnunina fyrir *binomialtheoreminu* hafa menn ýmislega. Ein er þannig löguð sem hèr segir: Hvað bókstafina a og b snertir, þá fellur strax í augun, að *exponentarnir* við a fara minkandi, og þeir við b fara vaxandi. það er þá einungis lögmál *coefficientanna* (269, β), sem sanna þarf. Verði það nú sannað, að þegar lögmálið (269, β) gildir við eitt veldi, þá verði það einnig að gilda við næsta veldi fyrir ofan, verði þetta, segi eg, einungis sannað, þá er líka undir eins sannað, að sama *coefficienta* lögmál gildi fyrir öll veldi, og bregðist aldrei. Setningin, sem sannast á, er þá þessi: Ef lögmálið gildir fyrir n^{ta} veldi, þá gildir það einnig fyrir $(n+1)^{ta}$ veldi.

Vèr höfum sèð bæði af (54, A og B), sömuleiðis af (266) og (267), að sèrhvert $(n+1)^{ta}$ veldi fæst með því, að margfalda sèrhvert n^{ta} veldi með *binomio* $(a+b)$, eða að reglan er

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)^n(a + b). \qquad (\alpha).$$

En þetta aptur verður sama sem

$$(a + b)^n\, a + (a + b)^n\, b$$

eða $(a + b)^n$ margfaldað fyrst með a, og síðan með b, og þar næst lagt saman.

Nú rekjum vèr í sundur $(a + b)^n$ í endalausa *series* með óákvörðuðum *coefficientum* og höfum til þess *Ramusar coefficienta*, þannig:

$$(a+b)^n = a^n + A_1^{(n)}a^{n-1}b + A_2^{(n)}a^{n-2}b^2 + A_3^{(n)}a^{n-3}b^3 +$$
$$A_4^{(n)}a^{n-4}b^4 + \cdots\cdots\cdots \qquad (\beta).$$

þessa *series* margföldum vèr fyrst með a, kemur

$$(a+b)^n a = a^{n+1} + A_1^{(n)}a^n b + A_2^{(n)}a^{n-1}b^2 + A_3^{(n)}a^{n-2}b^3 + \cdots (\gamma),$$

síðan hina sömu með b, kemur

$$(a + b)^n b = a^n b + A_1^{(n)}a^{n-1}b^2 + A_2^{(n)}a^{n-2}b^3 + \cdots (\delta).$$

Nú leggjum vèr saman hinar margfölduðu raðir, kemur

$$(a+b)^n(a+b) = a^{n+1} + \left[\begin{matrix}A_1^{(n)}\\1\end{matrix}\right] a^n b + \left.\begin{matrix}A_2^{(n)}\\A_1^{(n)}\end{matrix}\right\} a^{n-1}b^2 +$$

$$\left.\begin{matrix}A_3^{(n)}\\A_2^{(n)}\end{matrix}\right\} a^{n-2}b^3 \quad \cdots\cdots (\varepsilon).$$

Eptir (α) skal þetta *product* vera sama sem $(a+b)^{n+1}$; þess vegna verðum vèr í (β) að setja $n+1$ fyrir n, svo að *formula* sú hljóði upp á $(n+1)^{ta}$ veldi, þannig:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + A_1^{(n+1)}a^n b + A_2^{(n+1)}a^{n-1}b^2 +$$
$$A_3^{(n+1)}a^{n-2}b^3 + A_4^{(n+1)}a^{n-3}b^4 + \cdots\cdots\cdots (\zeta).$$

Nú förum vèr þá að ákvarða *coefficientana* í $(a+b)^{n+1}$, sem hingað til hafa verið ókunnir, og það gjörum vèr með því að jafna saman *coefficientunum* í (ζ) og (ε), þannig:

$$A_1^{(n+1)} = A_1^{(n)} + 1$$
$$A_2^{(n+1)} = A_2^{(n)} + A_1^{(n)}$$
$$A_3^{(n+1)} = A_3^{(n)} + A_2^{(n)}$$

og yfir höfuð

$$A_m^{(n+1)} = A_m^{(n)} + A_{m-1}^{(n)}. \qquad (\eta).$$

Með orðum sagt:

Sèrhver (m^{ti}) *coefficient* í sèrhverju veldi er eins og sama sætis *coefficient* í næsta lægra veldi að viðlögðum *coefficientinum,* sem þar er næst fyrir framan.

271. Athugasemdir. Þó sönnun vor sè ekki enn til lykta leidd, þá látum vèr standa svona um stund, til að skýra nokkur atriði í henni.

1. *Ramusar coefficientar* (269, α, γ) sýna ekki *binomialcoefficientana,* eins og þeir eru í (269, β), heldur notum vèr þá fyrst um sinn sem óákvarðaða og öldungis ókenda *coefficienta,* þangað til vèr höfum sannað, að

$$A_1^{(n)} = \frac{n}{1}$$
$$A_2^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$$
$$A_3^{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \quad \text{o. s. frv.}$$

2. Eptir samlagningarreglunum (21) mátti ekki leggja saman raðirnar γ og δ í (270) eins og þær stóðu, heldur varð að skrifa liðinn $a^n b$ í röðinni δ undir liðinn $A_1^{(n)} a^n b$ í röðinni γ, þannig:

$$\begin{array}{r} A_1^{(n)} a^n b \\ a^n b \\ \hline \end{array}$$

að summan í ε yrði $(A_1^{(n)}+1)a^n b$ því eptir (21) má ekki leggja *coefficienta* saman nema bókstafir og þeirra *exponentar* sè hinir sömu. Eins er með hina aðra liði í þessum *series*.

3. Að setningin η í (270) standi heima, sèst af þessum fyrstu *binomial*veldum:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= a^0 + ob = 1 \\
(a+b) &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Í 4ða veldi t. d. er

$$A_1^{(4)} = 4 = 3 + 1,$$

nefnilega 3 við a^2b, og 1 við a^3 í 3ja veldi.

$$\begin{aligned}
A_2^{(4)} &= 6 = 3 + 3 \\
A_3^{(4)} &= 4 = 1 + 3 \\
A_4^{(4)} &= 1 = 0 + 1 \\
A_5^{(4)} &= 0 = 0 + 0.
\end{aligned}$$

Eins má bera 3ja veldi saman við 2að veldi, þannig:

$$\begin{aligned}
A_1^{(3)} &= 3 = 2 + 1 \\
A_2^{(3)} &= 3 = 1 + 2 \\
A_3^{(3)} &= 1 = 0 + 1 \\
A_4^{(3)} &= 0 = 0 + 0.
\end{aligned}$$

Eins má bera 2að veldi saman við 1ta, þannig:

$$\begin{aligned}
A_1^{(2)} &= 2 = 1 + 1 \\
A_2^{(2)} &= 1 = 0 + 1 \\
A_3^{(2)} &= 0 = 0 + 0.
\end{aligned}$$

Eins má bera 1ta veldi saman við 0ta.

$$A_1^{(1)} = 1 = 0 + 1$$

$$A_2^{(1)} = 0 = 0 + 0.$$

272. Nú förum vèr eiginlega að sanna það, að ef (269, β) gildir fyrir eitthvert tiltekið veldi, svo sem hið $n$ta, þá gildir (269, β) einnig fyrir næsta veldi þar fyrir ofan, nefnilega fyrir $(n+1)$ta veldi; því eptir (270, η) höfum vèr

$$A_1^{(n+1)} = A_1^{(n)} + 1$$

en gefið er $$A_1^{(n)} = \frac{n}{1} \qquad (269, \beta),$$

þá $$A_1^{(n+1)} = \frac{n}{1} + 1.$$

Gjör samnefnt $$\frac{n}{1} + \frac{1}{1} = \frac{n+1}{1}$$

þá $$A_1^{(n+1)} = \frac{n+1}{n}.$$

Sömuleiðis höfum vèr eptir (270, η)

$$A_2^{(n+1)} = A_2^{(n)} + A_1^{(n)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n}{1} \quad \text{eptir } (269, \beta),$$

gjör samnefnt $$= \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n\,.\,2}{1\,.\,2}.$$

Hinn sameiginlegi *factor* n í þessum *addendis* skal útilokast með [ ], en hinir ósameiginlegu *factorar* $(n-1)$ og 2 skulu setjast fyrir innan

$$= \frac{n[(n-1) + 2]}{1\,.\,2}$$

$$= \frac{n[n - 1 + 2]}{1\,.\,2}$$

$$= \frac{n[n + 1]}{1\,.\,2}.$$

Setjum stærra *factorinn* vinstra megin í teljaranum

$$A_2^{(n+1} = \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}.$$

Nú komum vèr til þriðja liðar

$$A_3^{(n+1)} = A_3^{(n)} + A_2^{(n)} \text{ eptir } (270, \eta),$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \text{ eptir } (269, \beta),$$

gjörum samnefnt, með því að margfalda síðara liðinn í teljara og nefnara með 3

$$A_3^{(n+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n-1)\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Hinir sameiginlegu *factorar* $n(n-1)$ útilokast, en hinir ósameiginlegu $(n-2)$ og 3 setjast fyrir innan [ ] til að *adderast*

$$= \frac{n(n-1)[(n-2)+3]}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$= \frac{n(n-1)[n+1]}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Setjum stærsta *factorinn* vinstra megin, svo þeir standi eptir röð stærða sinna

$$A_3^{(n+1)} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Nú viljum vèr ákvarða fjórða lið

$$A_4^{(n+1)} = A_4^{(n)} + A_3^{(n)} \text{ eptir } (270, \eta),$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \text{ eptir } (269, \beta),$$

gjörum samnefnt

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{n(n-1)(n-2)\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Útilokum sameiginlegu *factorana* $n(n-1)(n-2)$, en innilokum hina ósameiginlegu $(n-3)$ og 4

$$= \frac{n(n-1)(n-2)[(n-3)+4]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)[n+1]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$A_4^{(n+1)} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Loksins tökum vèr *coefficientinn* við hinn almenna lið

$$A_m^{(n+1)} = A_m^{(n)} + A_{m-1}^{(n)} \qquad (270, \eta)$$

$$A_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1.2\cdots m} \qquad (268)$$

$$A_{m-1}^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{1\,.\,2\cdots(m-1)}.$$

Þar $(m-1)^{ti}$ liður gengur næst undan m^{ta} lið, þá á seinasti *factor* í teljara $(m-1)^{ta}$ liðar $(n-m+2)$ að vera 1^{um} meiri en seinasti *factorinn* í teljara m^{ta} liðar, sem er $(n-m+1)$ eða

$$(n-m+1) + 1 = (n-m+2).$$

Vèr táknum þá samlagninguna þannig:

$$A_m^{(n+1)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\,.\,2\cdots\; m} + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{1\,.\,2\cdots\; m-1}.$$

Gjörum samnefnt með því að margfalda seinni *coefficientinn* í teljara og nefnara með m

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1.2\;\cdots\; m} + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)m}{1.2\;\cdots\;(m-1).m}.$$

Útilokum nú sameiginlegu *factorana* $n(n-1)\cdots(n-m+2)$ úr [ ], en innilokum hina ósameiginlegu $(n-m+1)$ og m; kemur

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)[n-m+1)+m]}{1\,.\,2\cdots\qquad m}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)[n+1]}{1\,.\,2\cdots\qquad m}.$$

Röðum loksins *factorunum* eptir stærð þeirra, verður

$$A_m^{(n+1)} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+2)}{1\,.\,2\quad\cdots\quad m}.$$

Berum nú saman lögmál *coefficientanna* í n^{ta} veldi og $(n+1)^{ta}$ veldi samkvæmt (269, β, γ).

Lögmálin í n^{ta} veldi eru þessi:

1. *Coefficientarnir* geta skoðazt sem brot, með jafnmörgum *factorum* í teljara og nefnara.

2. *Factorarnir* í teljaranum ganga eptir náttúrlegri apturábaktalningu, en í nefnaranum eptir áframtalningu.

3. Apturábaktalningin byrjar á veldisvísinum n, og endar á tölu, sem er $(m-1)$ minni en hann. Áframtalningin byrjar á 1 og endar á m.

Alt þetta á sèr fullkomlega stað í $(n+1)^{ta}$ veldi. Áframtalningin byrjar á veldisvísinum $(n+1)$ og endar á $(n+1)-(m-1)$ $= (n-m+2)$.

Dæmi. Annað veldi

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

getum vèr skoðað sem

$$a^2 + \frac{2}{1}\,ab + \frac{2\,.\,1}{1\,.\,2}\,a^0b^2 \;.$$

þá

$$(a+b)^{2+1}=a^{2+1}+\frac{2+1}{1}a^2b+\frac{(2+1).2}{1\,.\,2}ab^2+\frac{(2+1).2.(2-1)}{1\,.\,2\,.\,3}a^0b^3$$

$$= a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}ab^2 + \frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3}a^0b^3.$$

Þannig hefir þá 3ja veldi sömu eðli sem 2að veldi. Með sama hætti er þá líka sannað um 4ða og 3ja veldi.

$$(a+b)^{3+1} = a^{3+1} + \frac{3+1}{1}a^3b + \frac{(3+1)\,.\,3}{1\,.\,2}a^2b^2$$

$$+ \frac{(3+1)\,.\,3\,.\,(3-1)}{1\,.\,2\,.\,3}ab^3 + \frac{(3+1)\,3\,(3-1)(3-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^0b^4$$

$$= a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}a^2b^2 + \frac{4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3}ab^3 + \frac{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^0b^4$$

273. Þegar veldis*exponent binomisins* er heil tala, eins og í (268), þá eru og allir *cofficientarnir* heilar tölur, þó þeir í *binomialformulunni* sè í brotlíki. Þetta leiðir af því lögmáli, er þeir myndast eptir hver af öðrum með samlagningu (270, η), eins og sjá má af myndum *coefficientanna* í hinum lægstu veldum (271, 3). En þetta má líka sanna af *factorum coefficientanna* (269, β), þannig:

Að fyrsti *factorinn* $\frac{n}{1}$ er heil tala, liggur í augum uppi, þegar n er heil tala. Að tveir fyrstu *factorarnir* $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ mynda heila tölu, er auðsætt af því, að tölurnar n og $(n-1)$ eru nágrannatölur, svo hin eina verður að vera jöfn, en hin önnur ójöfn, og 2 í nefnaranum hlýtur því að ganga upp í annarihvorri. Sama er að segja um 3 *factora:*

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

að 3 hljóta að ganga upp í einhverri af hinum þremur tölum.

$$n,\ (n-1),\ (n-2),$$

sem koma næst hver eptir aðra í hinni eðlilegu talningarröð. Því einhver þeirra er

$$\equiv 0\ (mod.\ 3)$$

samber (105). Sama er að segja um hvað marga *factora* sem verða.

274. Þegar *indexinn* m í $A_m^{(n)}$ verður stærri en n, þá

verður $A_m^{(n)} = 0$, því þá kemst apturábaktalningin í teljaranum til núll, eða yfir núll. Verður þá 0 á meðal *factoranna* og gjörir *product* þeirra að núlli, því *multiplicator* 0 burtnemur alla *factorana* eptir (53, 2), t. d. ef $n = 4$, en $m = 7$, þá verður *coefficientinn*

$$A_7^{(4)} = \frac{4 . 3 . 2 . 1 . 0 . -1 . -2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}$$
$$= \frac{0}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}$$
$$= 0.$$

Sömuleiðis allir þeir *coefficientar,* sem á eptir koma. Hinn seinasti *coefficient* verður því

$$A_4^{(4)} = \frac{4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4} = 1,$$

sem er *coefficientinn* við b^4, og þar með endar *series.*

274*. Þegar vèr lítum á *coefficientana,* þá sjáum vèr, að þeir alt til miðjunnar á veldinu skrifuðu sem *polynomium* fara vaxandi, en síðan fara þeir minkandi, og koma hinir sömu aptur í gagnstæðri röð, unz *coefficientinn* við b^n verður $= 1$, eins og hann var við a^n. Hinir næstu *coefficientar* báðum megin, nefnilega við $a^{n-1}b$ og ab^{n-1} verða ætíð $= n$, eins og veldisvísirinn. Þetta er skiljanlegt af því að $a+b = b+a$, og þegar $a+b$ *potenserast,* verður það eins og þegar $b+a$ *potenserast,* nema hvað a og b skiptast um, og b^n verður vinstra megin, en a^n hægra megin. *Coefficientarnir* koma af *additionum* sèrframkvæmanna og breytast ekki fyrir það, þó a og b hafi sætaskipti og öll veldi þeirra að því skapi. Þetta sæist með því að yfirfara margfaldanirnar (54, A, B) (266), en skipta um a og b. Er svo *coefficienta*röðin apturábak lesin eins og hún er áfram lesin.

Skoðum vèr t. d. sjötta veldi

$$(a+b)^6 = a^6 + \underset{\substack{A_1^{(6)} \\ 6}}{\frac{6}{1}}a^5b + \underset{\substack{A_2^{(6)} \\ 15}}{\frac{6 . 5}{1 . 2}}a^4b^2 + \underset{\substack{A_3^{(6)} \\ 20}}{\frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3}}a^3b^3$$
$$+ \underset{\substack{A_4^{(6)} \\ 15}}{\frac{6 . 5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3 . 4}}a^2b^4 + \underset{\substack{A_5^{(6)} \\ 6}}{\frac{6 . 5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}}ab^5 = \underset{\substack{A_6^{(6)} \\ 1}}{\frac{6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}}b^6$$

þegar *coefficientarnir* eru jafnir, þá fylla *indexar* þeirra veldisvísinn *n*, og þegar *indexarnir* fylla veldisvísinn *n*, þá eru *coefficientarnir* jafnir, eða þar er:

$$A_m^{(n)} = A_{n-m}^{(n)}.$$

Skoðum fyrst hèr í 6ta veldi

$$A_1^{(6)} = A_{6-1}^{(6)}$$

það er $A_1^{(6)} = A_5^{(6)}$. Hèr er $1 + 5 = 6$; og munum til þess, að *indexinn* í *Ramusar binomialcoefficientum* er ætíð hinn seinasti *factor* í nefnaranum (269, β), eins og *terminus generalis* sýnir. Hèr er $A_1^{(6)} = \frac{6}{1}$, en $A_5^{(6)} = \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ og eru hèr sameiginlegir *factorar* í teljara og nefnara þessir: $2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$ áfram taldir í nefnaranum, en apturábak taldir í teljaranum. Vèr getum því stytt brotið með þeim. Kemur þá

$$A_5^{(6)} = \frac{6}{1} = A_1^{(6)}.$$

Þannig er þá *coefficientinn* við ab^5 hægra megin, eins og við a^5b vinstra megin. Þess vegna, eins og hèr er summa *exponentanna* eða veldisvísirinn $= 6$, svo er og summa *indexanna* $= 6$.

Skoðum nú næstu *coefficienta* sinn frá hvorri hendi

$$A_2^{(6)} = A_4^{(6)}$$

það er $\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2}$ og $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$

þar *indexarnir* sýna seinustu *factora* nefnaranna.

Nú með því hinn fyrri *coefficient* liggur vinstra megin í hinum síðara, þá afmörkum vèr hann með standstryki í honum þannig:

$$A_4^{(6)} = \frac{6 \,.\, 5 \,.| \, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.| \, 3 \,.\, 4}$$

og skoðum svo báða samskeytta. Sameiginlegir *factorar* í $A_4^{(6)}$ eru hèr 3 og 4, áframtaldir í nefnaranum, en apturábak taldir í teljaranum; og þegar stytt er með þeim, verður

$$A_4^{(6)} = \frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} = A_2^{(6)}.$$

Hèr er summa *indexanna* $= 6$, og *exponentanna* við *a* og *b* eða veldisvísirinn $= 6$.

Þessu næst komum vèr til miðjunnar

$$A_3^{(6)} = A_{6-3}^{(6)}$$

$$A_3^{(6)} = A_3^{(6)}$$

eða $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

Hèr er ekki um tvent að gjöra, heldur eitt, og hèr eru engir sameiginlegir *factorar* í teljara og nefnara. Þannig verður miðjan, þegar veldis*exponentinn* er jöfn tala.

Nú viljum vèr sjá hið almenna samskeytta form hins minna *indexar* m og hins stærra *indexar* $n—m$.

Ósameiginlegir *factorar*	Stærsti sameiginl. *factor.*	Sameiginl. *factorar.*	Minsti sameiginl. *fact.*
$n(n-1) \cdots\cdots (n-m+1)$	$(n-m)$	$(n-m-1) \cdots\cdots\cdots$	$(m+1)$
$1 \,.\, 2 \cdots\cdots m$	$(m+1)$	$(m+2) \cdots\cdots\cdots$	$n-m$
Ósameiginlegir *factorar.*	Minsti sameiginl. *factor.*	Sameiginl. *factorar.*	Stærsti. sameiginl. *fact.*

Eptir *terminus generalis* standast á hinir seinustu ósameiginlegu *factorar* $(n—m+1)$ í teljaranum og m í nefnaranum. Þessir eru hèr með standstryki greindir frá hinum sameiginlegu *factorum* hægra megin minkandi og vaxandi á misvíxl. Hinn stærsti sameiginleigi *factor* $n—m$ er einum minni en $(n—m+1)$ í teljaranum. Hinn minsti sameiginlegi *factor* $m+1$ er einum meiri en m í nefnaranum. Röðin í teljaranum endar líka á $m+1$, en í nefnaranum á $(n—m)$, sem er sá *index*, er fyllir *indexinn* m til að verða $= n$, en verður þó að vera stærri en m, því annars gæti hann ekki staðið hægra megin, þar röðin vex í hægri hönd. *Index* m verður því að takast $< \frac{1}{2}n$, ef hann á að standa vinstra megin.

Berum vèr nú saman t. d. 3ja og 8da *coefficient* í 11ta veldi, þá er

$$\frac{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.| 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.| 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8} = 165 = A_3^{(11)} = A_8^{(11)}$$

Berum og saman 4ða og 7da *coefficient* í sama veldi; þá er:

$$\frac{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,|.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,|.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} = 330 = A_4^{(11)} = A_7^{(11)}$$

Nú hinn 5ta og 6ta:

$$\frac{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.| 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.| 6} = 462 = A_5^{(11)} = A_6^{(11)}$$

Hèr falla hinn stærsti og minsti sameiginlegi *factor* saman í einn, sem er 6. Nú er komin miðjan, sem er tveir *coefficientar* jafnir, eins og vant er, þegar veldis*exponentinn* er oddatala. Hèr í þessum tölulið köllum vèr einungis sameiginlega *factora* þá sem nefnast við áframtalning og apturábaktalninguna í *binomialcoefficientunum*, en ekki þá sem þessir *factorar* kunna aptur að leysast upp í. Fjöldi þessara hèr umtöluðu sameiginlegu *factora* er ætíð $= n - 2m$, þegar m er hinn minni *index*. Þetta má bezt sjá á nefnaranum í hinu almenna formi með því að draga minni *indexinn* frá hinum meira, því þá er $(n-m) - m = n - 2m$. Þegar menn vita *indexa* beggja hinna jöfnu *coefficienta*, þá er hægasti mátinn til að finna fjölda hinna sameiginlegu *factora* að draga minna *indexinn* m frá hinum meira $n-m$, eins og sèst á nefnurunum almenna formsins og dæmanna.

Ef *indexar coefficientanna* ekki fylla veldisvísinn, þá eru *coefficientarnir* ekki jafnir, því þá vantar hina sameiginlegu *factora*, er stytt geti hið lengra brot, svo það verði að hinu styttra vinstra megin við standstrykið. Þar verða þá hægra megin við standstrykið annaðhvort engir sameiginlegir *factorar*, heldur einungis ósameiginlegir, ellegar þar verða bæði sameiginlegir og ósameiginlegir *factorar*, og þessir ósameiginlegu gjöra það, að lengra brotið verður ekki stytt, svo að framkomi hið styttra brot, sem er vinstra megin við standstrykið.

Vèr viljum nú gjöra það ljósara, að þegar *coefficientarnir* eru jafnir, þá fylli *indexarnir* veldisvísinn, og tökum til þess dæmið $A_3^{(11)} = A_8^{(11)}$ hèr að framan. Vèr vitum, að ef þessir *coefficientar* eru jafnir, þá er:

$$\frac{A_8^{(11)}}{A_3^{(11)}} = 1. \quad \text{það er}$$

$$\frac{11.10.9.8.7.6.5.4}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8} : \frac{11.10.9}{1.2.3} \quad \text{ellegar}$$

$$\frac{11.10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7.8} \times \frac{1.2.3}{11.10.9} = \frac{11.10.9.8.7.6.5.4.3.\ 2.1}{1.\ 2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} = 1.$$

Hèr sèst, að 3 og 8 fylla 11, því tölurnar fyrir aptan 3 í nefnaranum eru 8, því teljarinn telur þær apturábak. Eins er með 8 í nefnaranum. Tölurnar þar á eptir eru 3, því teljarinn telur þær aptur á bak.

Til að sanna, að þegar *indexarnir* fylla veldisvísinn, þá sè *coefficientarnir* jafnir, má og gjöra brotin $A_m^{(n)}$ og $A_{n-m}^{(n)}$ samnefnd, sem nú skal greina. Vèr höfum *terminus generalis* hljóðanda upp á *index m* í (269, β); en vèr þurfum að útvega oss hann fyrir *index n — m,* og það gjörist með því að innsetja $(n-m)$ í staðinn fyrir m í hinum (269, β) eða einúngis í hinn seinasta *factor* í teljara hans. Þá verður

$$n-m+1 = n-(n-m)+1 = n-n+m+1 = m+1,$$

svo seinasti *factor* teljarans verður þar $= m+1$. Þá verður

$$A_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\,.\,2\cdots m}$$

$$A_{(n-m)}^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(m+1)}{1\,.\,2\cdots(n-m).}$$

Til að gjöra brotin samnefnd, má margfalda hvors brots teljara og nefnara með hins brotsins nefnara eptir (93), þannig:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)\,.\,1\,.\,2\cdots(n-m)}{(1\,.\,2\cdots m)\,(1\,.\,2\cdots(n-m))}$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(m+1)\,(1\,.\,2\cdots m)}{(1\,.\,2\cdots n-m)\,(1\,.\,2\cdots m).}$$

Nú þarf að raða *factorunum* í teljurunum eptir stærðum þeirra, að svo miklu leyti sem verður, þannig:

$$A_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 2\,.\,1}{1\,.\,2\cdots(n-m)(1\,.\,2\cdots m)}$$

$$A_{n-m}^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(m+1)\;m\cdots 2\,.\,1}{1\,.\,2\cdots(n-m)(1\,.\,2\cdots m).}$$

Nefnararnir eru hinir sömu, eða brotin samnefnd, en teljararnir eru óslitin *factor*aröð:

$$n(n-1)\cdots\cdots\cdots 1$$

og þess vegna einn og hinn sami teljari.

Tökum vèr dæmið, sem vèr höfðum áður

$$A_3^{(11)} = A_8^{(11)},$$

þá er

$$\frac{11\,.\,10\,.\,9\,.\overbrace{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}^{\text{Sameiginlegir } factorar}}{\underbrace{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8)}_{\text{Sameiginlegir } factorar.}(1\,.\,2\,.\,3)} = \frac{11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3} = 11\,.\,5\,.\,3 = 165.$$

275. Þegar vèr í (274*) höfðum gjört *coefficientana* $A_m^{(n)}$ og $A_{n-m}^{(n)}$ samnefnda, þá fengum vèr *terminus generalis* í *coefficienta*röðinni

$$A_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots 1}{1\,.\,2\cdots(n-m)(1\,.\,2\cdots m)}.$$

Setjum nú $n-m=p$, þá verður $p+m=n$, og gætum þess, að *indexinn* m er sama tala, sem *exponentinn* við b. Verður þá p eins og *exponentinn* við a. Nú getum vèr sett teljarann fram fyrir, til að láta hann síðan verða sameiginlegan *factor*, en bókstafina með *exponentum* sínum fyrir ofan; verður þá *terminus generalis* liðanna:

$$A_m^{(n)} = 1\,.\,2\,.\,3\cdots n\frac{a^p}{1\,.\,2\cdots p}\,.\,\frac{b^m}{1\,.\,2\cdots m};$$

er þá ætíð $p+m=n$.

Hèr má stytta fyrir sèr, með því að tákna *product* af *factorum* í eðlilegri talnaröð, þannig: $[1] = 1$, $[2] = 1\,.\,2$, $[3] = 1\,.\,2\,.\,3$, $[q] = 1\,.\,2\cdots q$, $[q+1] = 1\,.\,2\cdots(q+1)$, þá er og $[q] = \frac{1\,.\,2\cdots(q+1)}{(q+1)} = \frac{[q+1]}{q+1}$. Hèr með má útvíðka táknun þessa til $q = 0$, og er þá $[0] = \frac{[1]}{1} = 1$. Með þessum táknunum má skrifa mjög stutt *binomialformuluna*, þannig:

$$\frac{(a+b)^n}{[n]} = \frac{a^n b^0}{[n][0]} + \frac{a^{n-1}}{[n-1]}\frac{b^1}{[1]} + \frac{a^{n-2}}{[n-2]}\frac{b^2}{[2]}\cdots\frac{a^p}{[p]}\frac{b^m}{[m]}\cdots\cdots \frac{a^0}{[0]}\frac{b^n}{[n]}.$$

En þess er að gæta, að hún er deild með hinum afsíðis setta sameiginlega *factor* $[n]$, eins og sjá má vinstra megin. Hèr er allsstaðar $p+m=n$, og liðirnir samsvara öllum þeim tilbreytingum, er má leysa upp n í summur tveggja *addenda*, er hvor fyrir sig er heill og *positifur* ellegar 0.

276. Þegar þrír liðir eru í rótinni, sem hefjast skal upp í veldi, er annaðhvort höfð þar til margföldun ellegar *trinomialformulan*. Má og nota þar til *binomialformuluna*, ef í staðinn fyrir b í henni er sett $b+c$, og þetta $b+c$ síðan hafið upp í öll þau veldi, sem tiltekin voru með *exponentunum* við b. Sama er að segja um *quadrinomial-*, *quintinomial-* og yfir höfuð *poly-*

nomial-formulurnar, þegar liðirnir í rótinni eru 4, 5, eða hvað margir sem eru. Til að hafa sýnishorn af þessu, skoðum vèr hèr *cubus trinomii*.

$$\frac{(a+b+c)^3}{[3]} = \frac{a^3(b+c)^0}{[3]\,[0]} + \frac{a^2(b+c)^1}{[2]\,[1]} + \frac{a^1(b+c)^2}{[1]\,[2]} + \frac{a^0(b+c)^3}{[0]\,[3]}$$

Hèr skal inn setja í annan lið $\frac{(b+c)^1}{1} = \frac{b^1c^0}{[1]\,[0]} + \frac{b^0c^1}{[0]\,[1]}$ í þriðja lið $\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2c^0}{[2]\,[0]} + \frac{b^1c^1}{[1]\,[1]} + \frac{b^0c^2}{[0]\,[2]}$ og í fjórða lið $\frac{(b+c)^3}{[3]} = \frac{b^3c^0}{[3]\,[0]} + \frac{b^2c^1}{[2]\,[1]} + \frac{b^1c^2}{[1]\,[2]} + \frac{b^0c^3}{[0]\,[3]}$; kemur þá

$$\frac{(a+b+c)^3}{[3]} = \frac{a^3b^0c^0}{[3][0][0]} + \frac{a^2b^1c^0}{[2][1][0]} + \frac{a^2b^0c^1}{[2][0][1]} + \frac{a^1b^2c^0}{[1][2][0]}$$
$$+ \frac{a^1b^1c^1}{[1][1][1]} + \frac{a^1b^0c^2}{[1][0][2]} + \frac{a^0b^3c^0}{[0][3][0]} + \frac{a^0b^2c^1}{[0][2][1]}$$
$$+ \frac{a^0b^1c^2}{[0][1][2]} + \frac{a^0b^0c^3}{[0][0][3]} \quad \cdots\cdots\cdots \alpha.$$

Nú viljum vèr til samanburðar finna *cubus* þessa *trinomii* með margföldun

$$\begin{array}{l}
a+b+c \\
\underline{a+b+c} \\
a^2+ab+ac \\
\quad ab+b^2+bc \\
\quad\quad \underline{ac+bc+c^2} \\
a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\
\underline{a+b+c} \\
a^3+2a^2b+2a^2c+ab^2+2abc+ac^2 \\
\quad a^2b+2ab^2+2abc+b^3+2b^2c+bc^2 \\
\quad\quad \underline{a^2c+2abc+2ac+b^2c+2bc^2+c^3} \\
a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+b^3+3ac^2+3b^2c+3bc^2+c^3 \cdots\cdots \beta.
\end{array}$$

Þess var getið áður (275), að *coefficientunum* væri að nokkru leyti vikið afsíðis með því að setja $[n]$, sem hèr er $[3]$, í nefnara stað vinstra megin. Hèr af leiðir þá, að til að fá veldið skrifað með venjulegum hætti með þess *polynomialcoefficientum,* verður að margfalda alla liðina með $[n]$, og deila síðan með þeim stærðum, sem í hverjum lið standa í nefnurunum. Hèr er $[3] = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$. Hvað liðinn vinstra megin áhrærir, þá kemur

$\tfrac{6}{6} = 1$, sem er *coefficientinn* vinstra megin. Þar næst verður $\frac{a^3 b^0 c^0}{[3][0][0]}$ að $\tfrac{6}{6} a^3 = a^3$, sem er fyrsti liður *cubusar* þessa *trinomii*. Annar liður $\frac{a^2 b^1 c^0}{[2][1][0]}$ (skemra skrifað 210) verður $\tfrac{6}{2} a^2 b = 3a^2 b$. Þriðji liður 201 verður $\tfrac{6}{2} a^2 c = 3a^2 c$. Fjórði 120 verður $\tfrac{6}{2} ab^2 = 3ab^2$. Fimti 111 verður $\tfrac{6}{1} abc = 6abc$. Sjötti 102 verður $\tfrac{6}{2} ac^2 = 3ac^2$ (þann er hinn 7di í (β)). Sjöundi 030 í (α) verður $\tfrac{6}{6} b^3 = b^3$. Áttundi 021 verður $\tfrac{6}{2} b^2 c = 3b^2 c$. Níundi 012 verður $\tfrac{6}{2} bc^2 = 3bc^2$. Tíundi 003 verður $\tfrac{6}{6} c^3 = c^3$.

277. Til að tákna n^{ta} veldi alment gildanda *polynomii*

$$(a_1 + a_2 + a_3 \cdots\cdots a_t)^n$$

má rita það með líkum hætti, sem hins áðurnefnda *trinomii* þannig:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 \cdots\cdots a_t)^n}{[n]} = \Sigma \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} a_3^{m_3} \cdots\cdots a_t^{m_t}}{[m_1][m_2][m_3] \cdots\cdots [m_t]}.$$

Indexarnir telja, greina og einkenna liðina *polynomii*, sem er rótin; er þar hinn seinasti liður auðkendur með *indexinum t*. *Indexarnir* við m helga *exponentinn* rótarstaf þeim, sem hefir sama *index*. En *exponentar* þessir eru hèr óákvarðaðir, en hið gríska Σ táknar summu allra liða, sem framkomið geta í þessari mynd, þannig, að *exponentarnir* m_1, m_2, $m_3 \cdots\cdots m_t$ verði hver og einn allar tölurnar 0, 1, 2, $3 \cdots\cdots n$, með þeim hætti, að í hverjum lið verði summan ætíð $m_1 + m_2 + m_3 \cdots\cdots m_t = n$.

Sýnishorn hèr af er framanstandandi *cubus trinomii*. Í staðinn fyrir a, b, c þar er hèr a^1, a^2, a^3, og þá táknast öll runan (276, α) þannig:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3)^3}{[3]} = \Sigma \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} a_3^{m_3}}{[m_1][m_2][m_3]}.$$

Loksins tökum vèr til dæmis kvaðrat *quintinomii* eða 5liðastærðar.

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{[2]} = \Sigma \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} a_3^{m_3} a_4^{m_4} a_5^{m_5}}{[m_1][m_2][m_3][m_4][m_5]}.$$

Þar nú summa allra *exponentanna* $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$ ekki má verða meiri en 2, þá ef m_1 er sett $= 2$, þá verða allir hinir *exponentarnir* $= 0$, en $[m_2]$, $[m_3]$, $[m_4]$ og $[m_5] = [0]$

$= 1$. Með $[m_1]$, sem er $1 . 2 = 2$, skal deila $[2] = 2$, það er $\frac{2}{2} = 1$ gefur *quintinomialcoefficientinn* 1 í fyrsta lið, og sama er að segja um 5 fyrstu liðina í kvaðratinu, sem eru þessir:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \,.$$

Síðan verður summan $n = 2$ að sundrast, og getur hún þá ekki orðið nema í tvennu lagi, eins og þetta hjáritaða form sýnir, er sýnir allar merkingarnar bókstafanna m í öllum þeim 15 liðum er mynda hið eptirleitaða kvaðrat fimmliðastærðarinnar. Í öllum hinum síðari liðunum verður þá tvisvar $[1] = 1$, sem margfaldast saman til að deila $n = 2$ með; verður þá $\frac{[2]^\backprime}{[1][1]} = \frac{2}{1} = 2$, sem er *coefficientinn* í seinni liðunum. Hinir aðrir *factorar* $[0] = 1$ breyta engu, eins og venjulegt er. Verður svo kvaðrat þessarar fimmliðuðu stærðar:

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
2	0	0	0	0
0	2	0	0	0
0	0	2	0	0
0	0	0	2	0
0	0	0	0	2
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1.

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_1a_4 + 2a_1a_5 + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 + 2a_3a_5 + 2_4a_5 .$$

Yfir höfuð: hvað margir liðir sem í rótinni eru, þá er kvaðratið jafnt summu kvaðrata allra liðanna, *plus* tvöfaldri summu allra *producta* af tveimur og tveimur liðum rótarinnar.

278. Athugi. Í (233, λ) var getið um nokkuð, sem væri athugavert við reikningsforskriptina

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = a^{\frac{m}{n}} .$$

Með því að margfalda rótar*exponentinn* $\frac{n}{m}$ með m, og þá undir eins veldis*exponentinn* 1 með m (233, η), þá breytist myndin þannig:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} .$$

Sè nú a *positif* tala, þá merkir $\sqrt[n]{a^m}$ n^{tu} rótina af a^m, þá

sem er *positif*, en ekki fleiri, eptir því sem menn hafa komið sèr saman um. Þar á móti merkir $a^{\frac{m}{n}}$ fleira, því $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ og merkir allar n^{tu} rætunar a^m, bæði verulegar og ímyndaðar. Samber (253). Líking þessi er því ófull, og hefir eitt gildi vinstra megin, en n hægra megin. Sè nú a^m *negatif* stærð, en n jöfn tala, þá verður vinstra megin *imaginær* stærð ein, en hægra megin verða þær n. Sè n ójöfn tala, þá er vinstra megin *real* stærð, en hægra megin einnig *imaginærar* stærðir.

Keðjubrot (*Fractio continua*).

279. Keðjubrot (*fractio continua*) nefnist það brotabrot, sem er samantengt af fleirum brotabrotum, þannig, að allir teljararnir eru heilar tölur, en nefnararnir blandnar tölur, og nefnarar þessara blöndnu talna aptur blandnar tölur o. s. frv. Keðjubrotanna almenna mynd er þannig:

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 \cdots}}}}$$

Hèr er a_0 heil tala, sem fylgja kann keðjubrotinu, b_1 er teljari keðjubrotsins; $\frac{a_1 + b_2}{a_2}$ blandinn nefnari þess. En þessum blandna nefnara fylgir aptur í nefnaranum brotið $\frac{b_3}{a_3}$ o. s. frv.

280. Þó þetta sè hin almennasta mynd keðjubrotanna, þá er það þó ekki hin venjulegasta. Hin venjulega er, að teljararnir b_1, b_2, b_3 .... sè hver fyrir sig $= 1$.

Keðjubrotin eru mjög hentug til að rekja sundur stærðir, og gjöra þær þar með hægri í meðferðinni; t. a. m. stór brot, eða rèttara sagt brot með stórum tölum; og má þá stytta þau án sammælis þannig að þau skekkist sem minst. Því svo ber opt við, að ekki þarf á fullri nákvæmni að halda, og er þá þægilegt að láta tölurnar vera svo litlar sem má; og það geta menn mæta vel afskamtað með keðjubrotum og hinum þar út af fengnu nálg-

unarbrotum (*fractiones convergentes*), er kallast *convergentar.* Forskript fyrir sundurrakningu tölustórra brota er þessi:

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{p_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\left(\frac{q}{p_1}\right)} = a_0 + \frac{1}{x_1} \quad (\alpha).$$

$$x_1 = \frac{q}{p_1} = a_1 + \frac{p_2}{p_1} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad (\beta).$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} = a_2 + \frac{p_3}{p_2}. = a_2 + \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_3}\right)} = a_2 + \frac{1}{x_3} \quad (\gamma).$$

$$x_3 = \frac{p_2}{p_3} = a_3 + \frac{p_4}{p_3} = a_3 + \frac{1}{\left(\frac{p_3}{p_4}\right)} = a_3 + \frac{1}{x_4} \quad (\delta).$$

$$x_4 = \frac{p_3}{p_4} = a_4 + \frac{p_5}{p_4} = a_4 + \frac{1}{\left(\frac{p_4}{p_5}\right)} = a_4 + \frac{1}{x_5} \quad (\varepsilon).$$

....

$$x_r = \frac{p_{r-1}}{p_r} = a_r + \frac{p_{r+1}}{p_r} = a_r + \frac{1}{\left(\frac{p_r}{p_{r+1}}\right)} = a_r + \frac{1}{x_{r+1}} \quad (\zeta).$$

Út af þessu fást nú eptirfylgjandi sundurrakningar:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} \text{ eptir } (\alpha) \quad (\eta).$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \text{ eptir } (\beta)$$

innsett gefur

$$x = a^0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \quad (\vartheta).$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \text{ eptir } (\gamma)$$

innsett gefur

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\iota).$$

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} \text{ eptir } (\delta)$$

innsett gefur

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_4}}}} \qquad (\varkappa).$$

$$x_4 = a_4 + \frac{1}{x_5} \text{ eptir } (\varepsilon)$$

innsett gefur

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{x_5}}}}} \qquad (\lambda).$$

$$x_5 = a_5 + \frac{1}{x_6}.$$

þannig má áfram halda, unz að kemur x_m, sem er heil tala með engu broti, og sem þess vegna er $= a_m$.

Athugi. Hèr hefir prófessor *Ramus* sèrlegan skrifmáta til að láta keðjubrotin ekki vera svo fyrirferðarmikil í skriptinni. Hann ritar nefnilega keðjubrotið (λ) þannig:

$$x = a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ x_5. \qquad (\mu).$$

þegar keðjubrotið er rakið að einhverjum ótilteknum lið x_r, táknar hann það svo:

$$x = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{r-1},\ x_r. \qquad (\nu).$$

þegar keðjubrotið er rakið til enda, táknast svo:

$$x = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_m. \qquad (\xi).$$

þegar keðjubrotið er rakið frá einhverjum tilteknum lið x_r til annars tiltekins liðar x_t, táknast það svo:

$$x_r = a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \cdots a_{t-1},\ x_t \qquad (o).$$

þegar keðjubrotið er rakið frá x_r til enda, táknast það þannig:

$$x_r = a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ a_{r+3},\ \cdots\ a_m \qquad (\pi).$$

281. Dæmi upp á sundurrakningu í tölum. Vèr viljum rekja sundur brotið:

$$x = \frac{45887}{20286} = \frac{p}{q} = \frac{p}{p_0}.$$

Sundurrakningin gjörist alveg eptir (138), þannig:

$q = 20286)\ p = 45887\ (2 = a_0.\quad x = \frac{45887}{20286} = 2\frac{5315}{20286}.$

$\underline{40572}$

$5315 = p_1.$

$p_1 = 5315)\ q = 20286\ (3 = a_1.\quad x_1 = \frac{20286}{5315} = 3\frac{4341}{5315}.$

$\underline{15945}$

$4341 = p_2.$

$p_2 = 4341)\ p_1 = 5315\ (1 = a_2.\quad x_2 = \frac{5315}{4341} = 1\frac{974}{4341}.$

$\underline{4341}$

$974 = p_3.$

$p_3 = 974)\ p_2 = 4341\ (4 = a_3.\quad x_3 = \frac{4341}{974} = 4\frac{445}{974}.$

$\underline{3896}$

$445 = p_4.$

$p_4 = 445)\ p_3 = 974\ (2 = a_4.\quad x_4 = \frac{974}{445} = 2\frac{84}{445}.$

$\underline{890}$

$84 = p_5.$

$p_5 = 84)\ p_4 = 445\ (5 = a_5.\quad x_5 = \frac{445}{84} = 5\frac{25}{84}.$

$\underline{420}$

$25 = p_6.$

$p_6 = 25)\ p_5 = 84\ (3 = a_6.\quad x_6 = \frac{84}{25} = 3\frac{9}{25}.$

$\underline{75}$

$9 = p_7.$

$p_7 = 9)\ p_6 = 25\ (2 = a_7.\quad x_7 = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}.$

$\underline{18}$

$7 = p_8.$

$p_8 = 7)\ p_7 = 9\ (1 = a_8.\quad x_8 = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}.$

$\underline{7}$

$2 = p_9.$

$p_9 = 2)\ p_8 = 7\ (3 = a_9.\quad x_9 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$

$\underline{6}$

$1 = p_{10}.$

$p_{10} = 1)\ p_9 = 2\ (2 = a_{10}.\quad x_{10} = \frac{2}{1} = 2 = a_m = x_m.$

$\underline{2}$

$0.$

Keðjubrotið er nú á enda rakið, og verður uppsett eptir venjulegum hætti þannig:

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2.}}}}}}}}}}$$

Ellegar eptir Ramusar skript þannig:

$$x = 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 2,\ 5,\ 3,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2.$$

Hvernig *convergentarnir* eða nálgunarbrotin verða hèr út af fundin, geymum vèr oss að útskýra síðar.

282. Skýringar. Vèr álítum gott, að menn kynni sèr vel *formuluna* (280, ζ), og viljum skýra hana hèr með nokkrum orðum.

það er þá fyrst athugavert, að $x_r = \frac{p_{r-1}}{p_r}$ segir, að sèrhver fullur kvóti x_r finnist með því að deila næstundangangandi leif p_{r-1} með þáverandi leif p_r; t. a. m. í dæminu (281) skyldi *index* vera 3, þá er $p_{r-1} = p_{3-1} = p_2 = 4341$, og $p_r = p_3 = 974$, þá er $x_3 = \frac{4341}{974} = 4\frac{445}{974}$. þetta er sama sem næst kemur í *formulunni* ζ, nefnilega $a_r + \frac{p_{r+1}}{p_r}$, sem er blandna talan $4\frac{445}{974}$, því $a_r = 4$ er hinn ófulli kvóti, eða heila talan í hinum fulla kvóta. Brotið $\frac{p_{r+1}}{p_r} = \frac{445}{974}$ hefir fyrir teljara hina komandi leif $p_{r+1} = 445$, og fyrir nefnara hina þáverandi leif $p_3 = 974$. Hèr sèst, að í reikningi þessum þarf ekki að skrifa tölurnar, sem eru hægra megin í dæminu (281), því allar tölurnar fást vinstra megin. þessu næst kemur í reikningsforskriptinni (ζ), að hin umtalaða blandna tala sè $= a_r + \cfrac{1}{\left(\cfrac{p_r}{p_{r+1}}\right)} = 4\frac{1}{(\frac{974}{445})}$.

þessi ummyndun á brotinu verður þar af skiljanleg, að það er

eins og það sè stytt með teljara sínum, eða að þess teljara og nefnara sè deilt með teljaranum; þegar því p_{r+1} er deilt með p_{r+1}, kemur 1 í kvóta, sem er hinn nýi teljari, og þegar nefnaranum p_r er deilt með p_{r+1}, kemur $\frac{p_r}{p_{r+1}}$ í nefnarann, svo hið nýja brot verður

$$\frac{1}{\left(\frac{p_r}{p_{r+1}}\right)} = \frac{1}{x_{r+1}}.$$

Eins er í tölunum, brotið

$$\frac{445 : 445}{974 : 445} = \frac{1}{(\frac{974}{445})} = \frac{1}{x_4}.$$

Verður svo $\frac{974}{445} = x_4$ eða hinn komandi fulli kvóti.

283. Hvernig finna megi nálgunarbrotin.

Forskript:

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \;\cdots\cdots\; a_r \;\cdots\cdots \qquad (\alpha).$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{0} \quad \frac{y_0}{z_0} \quad \frac{y_1}{z_1} \quad \frac{y_2}{z_2} \quad \frac{y_3}{z_3} \quad \frac{y_4}{z_4} \;\cdots\cdots\; \frac{y_r}{z_r} \;\cdots\cdots \qquad (\beta).$$

$$\frac{y_r}{z_r} = \frac{y_{r-1}\,a_r + y_{r-2}}{z_{r-1}\,a_r + z_{r-2}} \qquad (\gamma).$$

Það er: Sèrhvert nálgunarbrot $\frac{y_r}{z_r}$ fæst með því, að margfalda hið næstundanganganda nálgunarbrot $\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}$ í teljara og nefnara með ófulla kvótanum a_r, og þar við síðan leggja teljara og nefnara hins annars nálgunarbrots á undan, sem er $\frac{y_{r-2}}{z_{r-2}}$. Til þess að geta strax byrjað þessa reglu við a_0, þá eru hèr sett tvö hjálparbrot

$$\tfrac{0}{1} \quad \tfrac{1}{0} \qquad (\delta)$$

fyrir framan nálgunarbrotin; og þessi hjálparbrot eru við allar tölur hin sömu.

Af nálgunarbrotunum eru

$\frac{y_0}{z_0}$	$\frac{y_1}{z_1}$	$\frac{y_2}{z_2}$	$\frac{y_3}{z_3}$	....	$\frac{y_{2n}}{z_{2n}}$	$\frac{y_{2n+1}}{z_{2n+1}}$	....	$\frac{y_m}{z_m}$	(ε).
of lítið	of stórt	of lítið	of stórt		of lítið	of stórt		rètt	

Skakkatakmörk nálgunarbrotanna

$$\frac{1}{z_0^2}\quad \frac{1}{z_1^2}\quad \frac{1}{z_2^2}\quad \frac{1}{z_3^2}\quad \cdots\quad \frac{1}{z_{2n}^2}\quad \frac{1}{z_{2n+1}^2}\qquad \text{rýmri}\qquad (\zeta).$$

$$\frac{1}{z_0 z_1}\quad \frac{1}{z_1 z_2}\quad \frac{1}{z_2 z_3}\quad \frac{1}{z_3 z_4}\quad \cdots\quad \frac{1}{z_{2n} z_{2n+1}}\quad \frac{1}{z_{2n+1} z_{2(n+1)}}\qquad \text{þrengri}\qquad (\eta).$$

284. Framhald dæmisins (281).

Nálgunarbrotin finnast þá þannig:

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	*Quotientes*
		2	3	1	4	2	5	3	*incompleti.*
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{43}{19}$	$\frac{95}{42}$	$\frac{518}{229}$	$\frac{1649}{729}$	*Fractiones convergentes.* Nálgunarbrot.
		$\frac{y_0}{z_0}$	$\frac{y_1}{z_1}$	$\frac{y_2}{z_2}$	$\frac{y_3}{z_3}$	$\frac{y_4}{z_4}$	$\frac{y_5}{z_5}$	$\frac{y_6}{z_6}$	
		of lítið	of stórt	of lítið	of stórt	of lítið	of stórt	of lítið	
		$\frac{1}{z_0^2}$	$\frac{1}{z_1^2}$	$\frac{1}{z_2^2}$	$\frac{1}{z_3^2}$	$\frac{1}{z_4^2}$	$\frac{1}{z_5^2}$	$\frac{1}{z_6^2}$	*Limites errorum.* Skakkatakmörk.
		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{361}$	$\frac{1}{1764}$	$\frac{1}{52441}$	$\frac{1}{531441}$	

a_7	a_8	a_9	a_{10}	*Quoti incompleti, ultimus completus.* Ófullir kvótar. Hinn seinasti fullur.
2	1	3	2	
$\frac{3816}{1687}$	$\frac{5465}{2416}$	$\frac{20211}{8935}$	$\frac{45887}{20286}$	*Fractiones convergentes.* Nálgunarbrot.
$\frac{y_7}{z_7}$	$\frac{y_8}{z_8}$	$\frac{y_9}{z_9}$	$\frac{y_{10}}{z_{10}}$	
of stórt	of lítið	of stórt	rétt	
$\frac{1}{z_7^2}$	$\frac{1}{z_8^2}$	$\frac{1}{z_9^2}$		*Limites errorum.* Skakkatakmörk.
$\frac{1}{2845969}$	$\frac{1}{5837056}$	$\frac{1}{79834225}$		

Þegar búið er að skrifa ófullu kvótana og hjálparbrotin þannig:

2 3 1 4 2 o. s. frv.

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{0}$

þá má reikna eptir (283, γ)

$$\frac{2 \,.\, 1 + 0}{2 \,.\, 0 + 1} = \frac{2}{1} = \frac{y_0}{z_0},$$

sem skrifast undir $2 = a_0$, stendur þá svo:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 3 & 1 & 4 \quad 2 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{0} & \frac{2}{1}. \end{array}$$

Nú tek eg ófulla kvótann 3, og reikna eptir (283, γ)

$$\frac{3 \,.\, 2 + 1}{3 \,.\, 1 + 0} = \frac{7}{3} = \frac{y_1}{z_1}$$

og skrifa $\frac{7}{3}$ undir ófulla kvótann 3, stendur þá svo:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 3 & 1 & 4 \quad 2 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{7}{3}. \end{array}$$

Síðan tek eg ófulla kvótann $a_2 = 1$ og reikna:

$$\frac{1 \,.\, 7 + 2}{1 \,.\, 3 + 1} = \frac{9}{4} = \frac{y_2}{z_2}.$$

þessa $\frac{9}{4}$ skrifa eg undir $1 = a_2$, stendur þá svo:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 3 & 1 & 4 \quad 2 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{7}{3} & \frac{9}{4}. \end{array}$$

Síðan tek eg 4 og reikna eptir (283, γ)

$$\frac{4 \,.\, 9 + 7}{4 \,.\, 4 + 3} = \frac{43}{19}$$

skrifa $\frac{43}{19}$ undir $4 = a_3$, stendur þá svo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{7}{3} & \frac{9}{4} & \frac{43}{19}. \end{array}$$

þessi reikningur eptir (283, γ) er svo lèttur, að má reikna hann í huganum, meðan tölurnar eru litlar, og það lengst fram eptir. En síðan má reikna hann afsíðis skriflega.

Prófessor *Degen* hafði öðruvísi uppsetningarmáta, sem er þægilegur optastnær, nefnilega:

	y	z
	0	1
	1	0
$a_0 = 2$	2	1
$a_1 = 3$	7	3
$a_2 = 1$	9	4
$a_3 = 4$	43	19
$a_4 = 2$	95	42
$a_5 = 5$	518	229
$a_6 = 3$	1649	729
$a_7 = 2$	3816	1687
$a_8 = 1$	5465	2416
$a_9 = 3$	20211	8935
$a_m = 2$	45887	20286.

Að hin gefna stærð, sem vèr sundur röktum, nefnlega $\frac{45887}{20286}$ ekki verður sem brot stytt eptir venjulegum hætti með sammæli (88), er auðsætt af því, að tölurnar hafa engan sammæli, er sèst af (281), þar $p_{10} = 1$. Talan 45887 er einnig frumtala. Það kemur sèr því vel, að má stytta slík brot með keðjubrotum, þannig, að þau skekkist sem minst. Því með jafnlitlum tölum, sem nálgunarbrotin hafa, eru engin brot til, sem jafnlítinn skakka hafa.

Nú förum vèr að hugleiða skakka nálgunarbrotanna. Eptir (283, ζ) er skakkatakmark nálgunarbrotanna $= \frac{1}{z_r^2}$. En skakkinn sjálfur er þó minni, svo þar er:

$$f_r < \frac{1}{z_r^2}.$$

En

$$f_r = \frac{p}{q} - \frac{y_r}{z_r} = x - \frac{y_r}{z_r}.$$

Þetta viljum vèr heimfæra upp á brotið $\frac{45887}{20286}$, sem er nú vort $\frac{p}{q}$. Ef vèr gjörum það að tugabroti með því, að *dividera* 45887 með 20286 eptir (179) (180), þá er $\frac{45887}{20286} =$ 2,26200335206546 ....

Vèr viljum prófa nálgunarbrotin $\frac{y_5}{z_5}$, $\frac{y_6}{z_6}$ og $\frac{y_7}{z_7}$, þannig:

$$\frac{y_5}{z_5} = \frac{518}{229} = 2{,}26200873 \quad \text{of stórt}$$

$$x = \frac{45887}{20286} = \underline{2{,}26200335}$$

$$f_5 = 0{,}00000538$$

$$\frac{1}{z_5^2} = \frac{1}{52441} = 0{,}0000\dot{1}906.$$

Hèr sjáum vèr, að nálgunarbrotið $\frac{y_5}{z_5}$ er of stórt, að skakkinn f_5 er $= 0{,}00000538$, en skakkasvæðið eða skakkatakmarkið er 0,00001906.

Nú tökum vèr $\frac{y_6}{z_6}$

$$x = \frac{45887}{20286} = 2{,}26200335$$

$$\frac{y_6}{z_6} = \frac{1649}{729} = 2{,}26200274 \quad \text{of lítið}$$

$$f_6 = 0{,}00000061$$

$$\frac{1}{z_6^2} = \frac{1}{531441} = 0{,}00000188.$$

Hèr sjáum vèr, að nálgunarbrotið $\frac{y_6}{z_6}$ er of lítið, að skakkinn f_6 er 0,00000061, en skakkasvæðið $\frac{1}{z_6^2}$ = 0,00000188. Nú tökum vèr $\frac{y_7}{z_7}$.

$$\frac{y_7}{z_7} = \frac{3816}{1687} = 2{,}26200355 \quad \text{of stórt}$$

$$x = \frac{45887}{20286} = 2{,}26200335$$

$$f_7 = 0{,}00000020$$

$$\frac{1}{z_7^2} = \frac{1}{2845969} = 0{,}00000035.$$

Hèr sjáum vèr, að nálgunarbrotið $\frac{y_7}{z_7}$ er of stórt, að skakkinn f_7 er = 0,00000020, en skakkasvæðið $\frac{1}{z_7^2}$ er = 0,00000035.

285. Framhald sama dæmis. Skakkatakmarkið þrengra (283, η), sem er einnig mismunur tveggja næstu *convergenta,* það er fyrir $\frac{y_5}{z_5}$, $\frac{y_6}{z_6}$ og $\frac{y_7}{z_7}$ þannig:

$$\frac{1}{z_5 z_6} = \frac{1}{229\,.\,729} = \frac{1}{166941} = 0{,}00000599$$

$$\frac{1}{z_6 z_7} = \frac{1}{729\,.\,1687} = \frac{1}{1229823} = 0{,}00000081$$

$$\frac{1}{z_7 z_8} = \frac{1}{1687\,.\,2416} = \frac{1}{4075792} = 0{,}00000024.$$

Að þessi skakkatakmörk eru sama sem mismunir næstu *convergenta,* sèst þannig:

$$\frac{y_5}{z_5} = 2{,}26200873$$

$$\frac{y_6}{z_6} = 2{,}26200274$$

$$\frac{y_5}{z_5} - \frac{y_6}{z_6} = 0{,}00000599$$

$$\frac{y_7}{z_7} = 2{,}26200355$$

$$\frac{y_6}{z_6} = 2{,}26200274$$

$$\frac{y_7}{z_7} - \frac{y_6}{z_6} = 0{,}00000081$$

$$\frac{y_7}{z_7} = 2{,}26200355$$

$$\frac{y_8}{z_8} = 2{,}26200331$$

$$\frac{y_7}{z_7} - \frac{y_6}{z_6} = 0{,}00000024.$$

Hvernig á þessu stendur, verður ljósara síðar, þegar farið verður að sanna þessa lærdóma.

Þó að skakkatakmörkin þrengri gangi skakkanum miklu nær en hin rýmri, þá nota menn samt opt hin rýmri, vegna þess það er hægra að finna $\frac{1}{z_r^2}$, heldur en $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$, því til að finna þetta síðara verður að vita næstkomanda kvóta og *convergents*-nefnara, og þess vegna fara nokkuð lengra, heldur en maður annars hefði viljað fara. Helmingi menn hið þrengra skakkasvæði, fæst skakkatakmark, er skakkinn kemst aldrei ofan fyrir.

286. Sè úr keðjubrotunum (280, η, ϑ, ι, $\varkappa$, λ) undanfelt $\frac{1}{x_{r+1}}$, verður hið eptirstandanda af keðjubrotinu *convergentinn* til a_r. Þá er nefnilega a_0 eða $\frac{a_0}{1}$ *convergentinn* til a_0 eptir $(\eta) = \frac{y_0}{z_0}$. Þar næst

$$a_0 + \frac{1}{a_1} \qquad (a)$$

keðjubrot eða blandin tala = *convergentinum* til a_1 eptir (ϑ) = $\frac{y^1}{z_1}$. Þar næst

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \qquad (b)$$

keðjubrot = *convergentinum* til a_2 eptir (ι) = $\frac{y_2}{z_2}$. Þar næst

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} \qquad (c)$$

keðjubrot = *convergentinum* til a_3, eptir ($\varkappa$) = $\frac{y_3}{z_3}$. Sèrhvert af þessum fæst út af hinu næstundanganganda með því að breyta

$$a_{r-1} \quad \text{í} \quad a_{r-1} + \frac{1}{a_r}. \qquad (d)$$

287. Nú viljum vèr snúa keðjubrotunum í einföld brot, án þess þó að hafa hina auðveldustu aðferð þar til, sem sýnd var í (283, γ), þá er

$$\frac{y_1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \quad \text{eptir (82)} \cdots (a).$$

Þar næst

$$\frac{y_2}{z_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1};$$

því brotna brotið

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a^2}}$$

gjörist hægast að einföldu broti með því að margfalda teljara þess 1 með nefnarans nefnara a_2, og þar næst nefnarann $a_1 + \frac{1}{a_2}$ einnig með a_2 eptir (98) ellegar (83). Af þessu kemur brotið

$$\frac{a_2}{a_1 a_2 + 1},$$

sem sett við heilu töluna a_0 gefur blöndnu töluna

$$a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1},$$

er gjörist að launbroti

$$\frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_2}{a_1a_2 + 1} = \frac{y_2}{z_2} \quad \ldots\ldots (b).$$

Framvegis

$$\frac{y_3}{z_3} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}.$$

þessu má snúa í alment brot með því að byrja neðan til og taka fyrst

$$\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_3}{a_2a_3 + 1}.$$

þá

$$\frac{1}{a_1 + \frac{a_3}{a_2a_3 + 1}} = \frac{a_2a_3 + 1}{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3};$$

þá

$$a_0 + \frac{a_2a_3 + 1}{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3}$$

$$= \frac{a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1 + a_0a_3 + a_2a_3 + 1}{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3};$$

þess vegna

$$\frac{y_3}{z_3} = \frac{a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1 + a_0a_3 + a_2a_3 + 1}{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3} \quad \ldots\ldots (c).$$

288. þessu næst viljum vèr sanna regluna (283, γ); þá er eptir (286)

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1} \qquad (\alpha),$$

sem er heila talan í keðjubrotinu, ef hún er nokkur; annars er sá *convergent* $= 0$. þetta á að vera samhljóða

$$\frac{y_r}{z_r} = \frac{y_{r-1}a_r + y_{r-2}}{z_{r-1}a_r + z_{r-2}} \qquad (283, \gamma).$$

Hèr er

$$r = 0, \ r-1 = -1, \ r-2 = -2.$$

þessir *negatifu indexar* benda á hjálparbrotin. Til samhljóðunarinnar útheimtist þá

$$y_{r-1} = y_{r-1} = 1 \quad y_{r-2} = y_{-2} = 0$$

$$z_{r-1} = z_{-1} = 0 \quad z_{r-2} = z_{-2} = 1.$$